#1: Anageo mit Derive

#2: Erzeugendensystem und Basis eines Vektorraumes

#3: ---------------------------

#4: vo := [0, 0, 0]

#5: v1 := [2, 1, -2]

#6: v2 := [3, 3, -2]

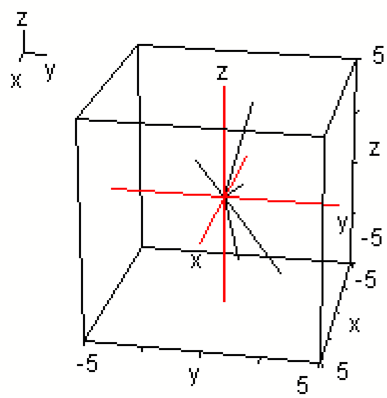
#7: v3 := [-1, 1, 4]

#8: v4 := [1, 1, 1]

#9: v5 := [1, -1, 2]

#10: Zeichnung:

#11: [vo, v1, vo, v2, vo, v3, vo, v4, vo, v5]



#12: Mit den Vektoren v1 bis v5 kann man jeden anderen Vektor des Raumes darstellen. Beispiel:

#13: [11, 6, -19] = v1 + 2·v2 - 3·v3 + v4 - v5

#14: $$\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

#15: Wir sagen: Die Vektoren v1 bis v5 bilden ein Erzeugendensystem des Vektorraumes.

#16: -----

#17: Wir brauchen aber gar nicht alle fünf Vektoren, die ersten drei reichen aus:

#18: $$\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -19 \end{bmatrix} = \left(-\frac{20}{6}\right)\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{27}{6}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \left(-\frac{25}{6}\right)\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

#19: Das liegt daran, dass v1, v2 und v3 linear unabhängig sind, d.h. nicht parallel und nicht alle drei in einer Ebene.

#20: -----

#21: Im dreidimensionalen Vektorraum bilden je drei linear unabhängige Vektoren ein minimales Erzeugendensystem.

#22: Jedes minimale Erzeugendensystem nennen wir eine BASIS des Vektorraumes.

#23: -----

#24: Es gibt beliebig viele Basen des dreidimensionalen Vektorraumes.

#25: Eine weitere Basis ist z.B.:

#26: $$\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

#27: Auch damit ist der Vektor [11,6,-19] darstellbar:

#28: $$\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -19 \end{bmatrix} = \left(-\frac{23}{6}\right)\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{57}{6}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{59}{6}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#29: -----

#30: Wenn die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen, nennen wir die Basis orthogonal.

#31: Wenn die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen und jeweils die Länge 1 haben, nennen wir die Basis Orthonormalbasis.

#32: Wenn die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen und jeweils die Länge 1 haben und ein Rechtssystem bilden, nennen wir die Basis Kartesisches Koordinatensystem.

#33: -----

#34: Es gibt beliebig viele Orthonormalbasen.

#35: Die einfachste Orthonormalbasis ist offensichtlich die folgende:

#36: $$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

#37: Jeder Vektor in 3D ist damit ganz einfach darstellbar. Beispiel:

#38: $$\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ -19 \end{bmatrix} = 11\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-19)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#39: -----

#40: Die Einheitsvektoren sind in DERIVE vordefiniert.

#41: Die Vektoren i_, j_ und k_ sind wie folgt vorbelegt:

#42: i_ = [1, 0, 0]

#43: j_ = [0, 1, 0]

#44: k_ = [0, 0, 1]

#45: -----