#1: Anageo mit Derive

#2: 5. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

#3: ---------------------------

#4: Lage dreier Vektoren in 3D

#5: Wenn drei Vektoren im Raum gegeben sind, dann gibt es folgende Fälle der gegenseitigen Lage:

#6: Fall 1: Alle drei liegen auf einer Linie.

#7: Fall 2: Zwei liegen auf einer Linie, der dritte aber nicht.

#8: Fall 3: Keiner liegt auf der Linie eines anderen, aber alle liegen in der gleichen Ebene.

#9: Fall 4: Keiner liegt auf der Linie eines anderen und die drei liegen nicht in der gleichen Ebene.

#10: Wie kann man das rechnerisch prüfen?

#11: -----

#12: Fall 1: Ein Vektor ist als Summe der beiden anderen darstellbar.

#13: Beispiel 1: [1,2,3] , [2,4,6] und [3,6,9].

#14: $[3, 6, 9] = \frac{1}{2}\cdot[1, 2, 3] + \frac{5}{4}\cdot[2, 4, 6]$

#15: -----

#16: Fall 2: Ein Vektor ist als Summe der beiden anderen darstellbar.

#17: Beispiel 2: [1,2,3] , [2,4,6] und [1,1,1].

#18: $[2, 4, 6] = 2\cdot[1, 2, 3] + 0\cdot[1, 1, 1]$

#19: -----

#20: Fall 3: Ein Vektor ist als Summe der beiden anderen darstellbar.

#21: Beispiel 3: [1,2,0] , [2,1,0] und [1,1,0].

#22: $[1, 1, 0] = \frac{1}{3}\cdot[1, 2, 0] + \frac{1}{3}\cdot[2, 1, 0]$

#23: -----

#24: Fall 4: Kein Vektor ist als Summe der beiden anderen darstellbar.

#25: Beispiel 4: [1,2,3] , [1,2,0] und [1,0,3].

#26: $[1, 2, 3] = k \cdot [1, 2, 0] + l \cdot [1, 0, 3]$

#27: SOLVE($[1, 2, 3] = k \cdot [1, 2, 0] + l \cdot [1, 0, 3]$, [k, l], Real)

#28: false

#29: -----

#30: -----

#31: Da es offensichtlich darauf ankommt, ob einer die Summe von anderen ist, gibt es dazu einen eigenen Begriff.

#32: Den Ausdruck

#33: $va = l \cdot vb + m \cdot vc$

#34: kann man offensichtlich auch so schreiben

#35: $k \cdot va + l \cdot vb + m \cdot vc = vo$

#36: $vo := [0, 0, 0]$

#37: Der Term $k \cdot va + l \cdot vb + m \cdot vc$ heißt Linearkombination der Vektoren va, vb und vc.

#38: -----

#39: Definitionen:

#40: Die Vektoren va, vb und vc heißen LINEAR ABHÄNGIG

#41: wenn deren Linearkombination den Nullvektor ergibt und dabei NICHT ALLE Parameter null sind.

#42: Formal:

#43: va, vb und vc linear ABhängig <==> $k \cdot va + l \cdot vb + m \cdot vc = vo$ und $(k \neq 0 \lor l \neq 0 \lor m \neq 0)$.

#44: Bedeutung:

#45: Jeder der Vektoren ist durch die beiden anderen als Linearkombination darstellbar.

#46: -----

#47: Die Vektoren va, vb und vc heißen linear UNabhängig

#48: wenn deren Linearkombination nur dann den Nullvektor ergibt, wenn dabei ALLE Parameter null sind.

#49: Formal:

#50: va, vb und vc linear UNabhängig <==> k·va + l·vb + m·vc = v0 ==> (k=0 ∧ l=0 ∧ m=0).

#51: Bedeutung:

#52: Keiner der Vektoren ist durch die beiden anderen als Linearkombination darstellbar.

#53: Sie liegen 'räumlich', nicht auf einer Linie, nicht in einer Ebene.

#54: -----

#55: -----

#56: Beispiele:

#57: k·[1, 2, 3] + l·[1, 2, 0] + m·[1, 0, 3] = [0, 0, 0]

#58: SOLVE(k·[1, 2, 3] + l·[1, 2, 0] + m·[1, 0, 3] = [0, 0, 0], [k, l, m], Real)

#59: k = 0 ∧ l = 0 ∧ m = 0

#60: Die Vektoren [1, 2, 3], [1, 2, 0] und [1, 0, 3] sind linear unabhängig.

#61: -----

#62: k·[1, 2, 3] + l·[1, 4, 3] + m·[2, 6, 6] = [0, 0, 0]

#63: SOLVE(k·[1, 2, 3] + l·[1, 4, 3] + m·[2, 6, 6] = [0, 0, 0], [k, l, m], Real)

#64: k + m = 0 ∧ l + m = 0

#65: Ich wähle k=1, m=-1 und l=1.

#66: 1·[1, 2, 3] + 1·[1, 4, 3] + (-1)·[2, 6, 6]

#67: [0, 0, 0]

#68: Die Vektoren [1, 2, 3], [1, 4, 3] und [2, 6, 6] sind linear abhängig!

#69: -----

#70: Anschaulich dürfte klar sein:

#71: In der Ebene können höchsten zwei Vektoren linear unabhängig sein, drei sind abhängig.

#72: Im Raum können höchsten drei Vektoren linear unabhängig sein, vier sind abhängig.

#73: -----