#1: Senkrechte Vektoren, Hinführung zum Skalarprodukt

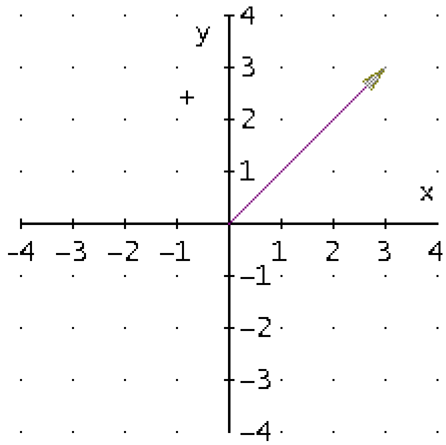
#2: ------------------------------

#3: LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz2D.mth)

#4: vo := [0, 0]

#5: v1 := [3, 3]

#6: Vektor2D(vo, v1, 0.3, 0.5)



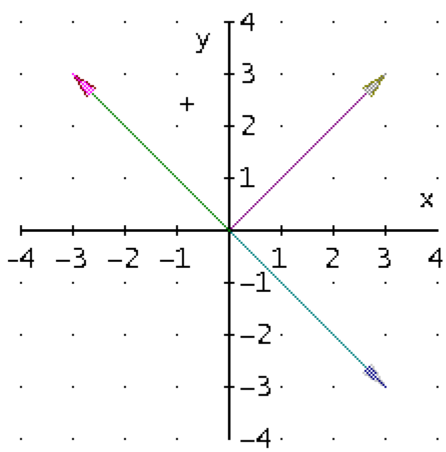
#7: Welcher Vektor steht senkrecht zu v1?

#8: Zunächst bestimmt der, der die gleiche y-Komponente aber entgegengesetzte x-Komponente hat:

#9: sv1a := [-3, 3]

#10: Aber auch [3,-3].

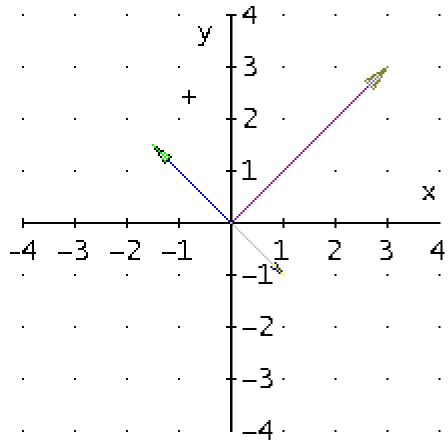
#11: sv1b := [3, -3]



#12: Die senkrechten zu v1 müssen nicht die gleiche Länge wie v1 haben:

#13: $sv1c := \left[- \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

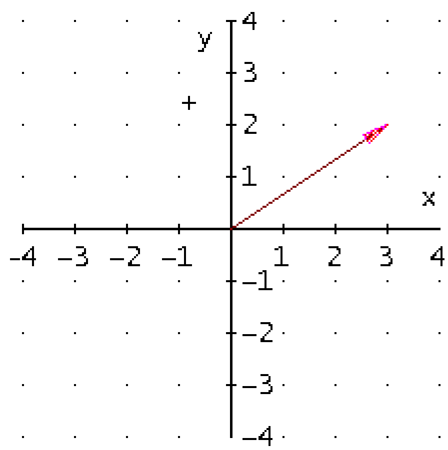
#14: sv1d ≔ [1, -1]



#15: ------------------------------

#16: Wir betrachten einen zweiten Vektor:

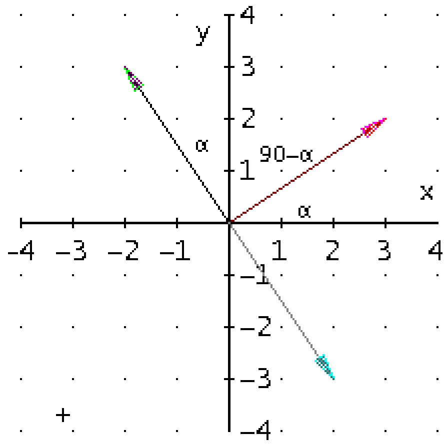
#17: v2 ≔ [3, 2]



#18: Wenn wir in v2 x und y vertauschen und EINE Komponente negativ machen, gibt es einen senkrechten Vektor:

#19: sv2a ≔ [-2, 3]

#20: sv2b ≔ [2, -3]



#21: Natürlich stehen auch Verkürzungen oder Verlängerungen von sv2 senkrecht auf v2.

#22: Woran liegt das?

#23: Der Winkel zwischen x-Achse und v2 sei α.

#24: Dann ist Winkel zwischen v2 und y-Achse 90− α.

#25: Der Winkel zwischen sv2a und y-Achse ist aber nach Konstruktion wieder α.

#26: Also ist der Winkel zwischen v2 und sv2a 90 − α + α = 90.

#27: ------------------------------

#28: Wir btrachten v2 und die dazu senkrechten:

#29: {[3, 2], [-2, 3], [2, -3], [1, -1.5]}

#30: Zu [x,y] ist [-sy,sx] oder [ty,-tx] senkrecht.

#31: Das Verhältnis von y-Komponente zu x-Komponente (Tangens) des zu einem Vektor senkrechten Vektors muss offensichtlich der negative Kehrwert des Ausgangsvektors sein:

#32: $$\frac{y2}{x2} = - \frac{1}{\frac{y1}{x1}}$$

#33: $$\frac{y2}{x2} = - \frac{x1}{y1}$$

#34: $y1 \cdot y2 = - x1 \cdot x2$

#35: $x1 \cdot x2 + y1 \cdot y2 = 0$

#36: Also: Zu [x1,y1] steht [x2,y2] senkrecht, wenn die Summe der Komponentenprodukte null ist.

#37: In unserem Beispiel waren [3, 2] und [1, -1.5] senkrecht zueinander.

#38: $3\cdot 1 + 2\cdot(-1.5) = 3 - 3 = 0$

#39: ------------------------------

#40: Die Summe der Komponentenprodukte hat einen Namen: Skalarprodukt.

#41: In Derive schreibt man einfach einen normalen Multiplikationspunkt dazwischen:

#42: $$[x1, y1]\cdot[x2, y2] = x1\cdot x2 + y1\cdot y2$$

#43: ------------------------------

#44: Merke: In der Ebene gilt, dass zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, wenn deren Skalarprodukt null ergibt.

#45: ------------------------------

#46: Beispiel: Gesucht ist ein senkrechter Vektor zu [-1,-2]. Ansatz:

#47: $[-1, -2]\cdot[x, y] = 0$

#48: SOLVE([-1, -2]·[x, y] = 0, [x, y], Real)

#49: $$x + 2\cdot y = 0$$

#50: Es gibt unendlich viele. Ich wähle y=1, dann ist x=-2. Probe:

#51: $$[-1, -2]\cdot[-2, 1] = 0$$

#52: ------------------------------

#53: Wenn man nur einen Vektor braucht, dann gibt man x oder y vor:

#54: $[-1, -2]\cdot[x, y] = 0 \wedge x = 1$

#55: SOLVE([-1, -2]·[x, y] = 0 ∧ x = 1, y, Real)

#56: $$y = -\frac{1}{2} \wedge x = 1$$

#57: ------------------------------

#58: Und wie geht das im Raum?