#1: Senkrechte Vektoren, Hinführung zum Skalarprodukt im R3

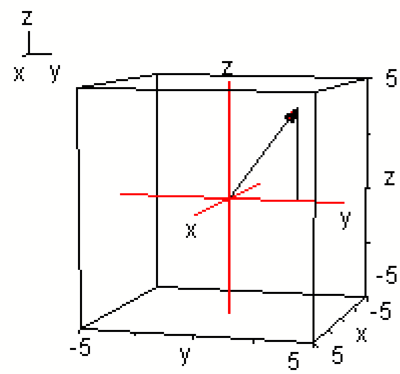
#2: LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz3D.mth)

#3: ——————————————————————————————

#4: Welcher Vektor steht senkrecht auf [0,3,4] ?

#5: v1 ≔ [0, 3, 4]

#6: vo ≔ [0, 0, 0]

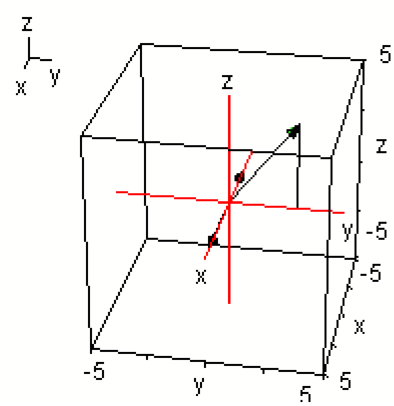


#7: Der Vektor liegt in der y-z-Ebene.

#8: Also stehen auf jeden Fall alle Vektoren auf der x-Achse dazu senkrecht:

#9: sv1a ≔ [4, 0, 0]

#10: sv1b ≔ [-3, 0, 0]

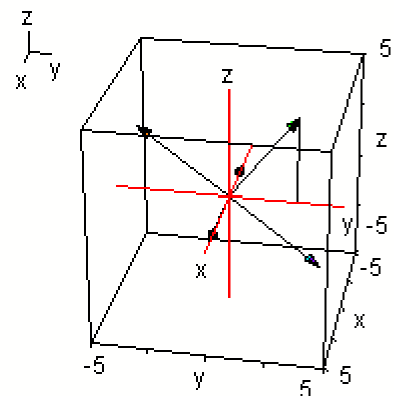


#11: Aber auch in der y-z-Ebene gibt es Senrechte. Wir wissen schon wie das geht: Komponenten vertauschen und eine negativ machen

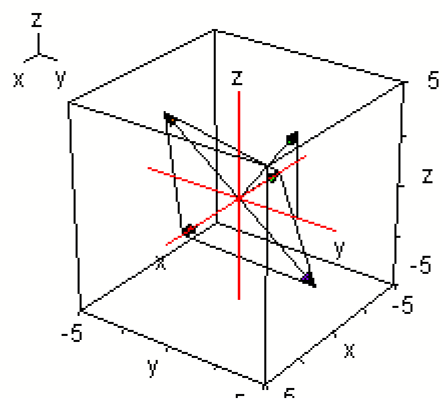
#12: v1 ≔ [0, 3, 4]

#13: sv1c ≔ [0, 4, -3]

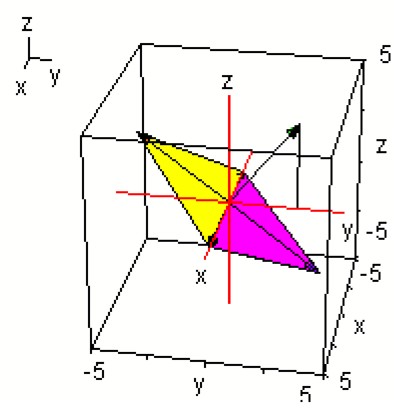
#14: sv1d ≔ [0, -4, 3]



#15: Ich verbinde die Eckpunkte:

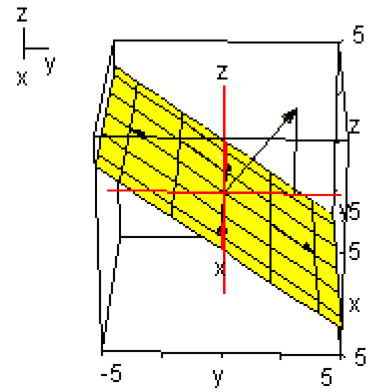


#16: Alle Vektoren, die in der aufgespannten Ebene liegen, stehen senkrecht auf v1!



#17: Ich nehme zwei Vektoren (nicht kollinear) um alle anderen Vektoren der Ebene zu berechnen:

#18: ebene_sv1(s, t) := [0, 0, 0] + s·[4, 0, 0] + t·[0, 4, −3]



#19: Wir vergleichen v1 und die dazu senkrechten Vektoren:

#20: $$v1 = [0, 3, 4]$$

#21: $$ebene\_sv1(s, t) = [4 \cdot s, 4 \cdot t, - 3 \cdot t]$$

#22: Wir berechnen das Skalarpodukt:

#23: $[0, 3, 4] \cdot [4 \cdot s, 4 \cdot t, - 3 \cdot t] = 0 \cdot 4 \cdot s + 3 \cdot 4 \cdot t + 4 \cdot (- 3 \cdot t)$

#24: $$[0, 3, 4] \cdot [4 \cdot s, 4 \cdot t, - 3 \cdot t] = 0$$

#25: ---

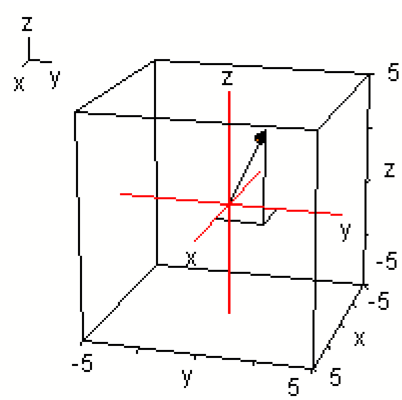
#26: Wieder sind die zu v1 senkrechten Vektoren die, deren SKP mit v1 null ergibt!

#27: ---

#28: ---

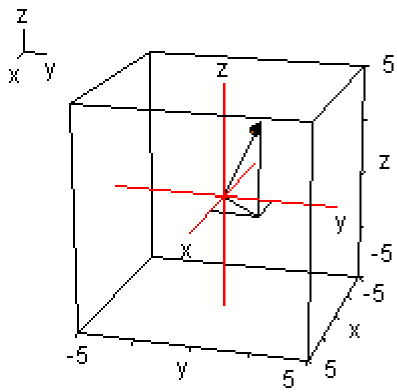
#29: Wir drehen jetzt den Vektor v1 um 45° über der x-y-Ebene in Richtung x-z-Ebene nach vorn:

#30: $v2 := \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}, 4 \right]$



#31: Wieder gibt es dazu senkrechte Vektoren in der x-y-Ebene. Sie stehen senkrecht auf der Projektion v2p:

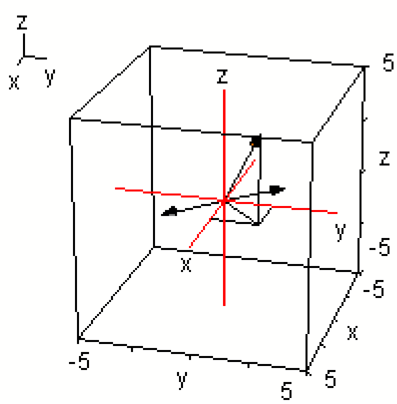
#32: $\text{v2p} := \left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ 0\right]$



#33: Vertauschen und negieren:

#34: $\text{sv2a} := \left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ -\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ 0\right]$

#35: $\text{sv2b} := \left[-\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ 0\right]$



#36: Es muss aber noch senkrechte Vektoren in der Ebene geben, die von v2 und v2p aufgespannt wird:

#37: $$\text{v2} = \left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2},\ 4\right]$$

#38: $\text{v2p} = \left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2},\ 0\right]$

#39: $$|\text{v2p}| = 3$$

#40: Die Projektion hat die Länge 3, also ist die Steigung von v2: 4/3 .

#41: Die dazu in der v2–v2p–Ebene senkrechten Vektoren müssen die Steigung 3/4 haben.

#42: Nach hinten auf der Linie der Projektion zeigen die Vektoren:

#43: $\left[\lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ \lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ z\right]$

#44: Wenn ich z=3 setze, muss die Projektion die Länge 4 haben:

#45: $\left[\lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ \lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ 3\right]$

#46: $\left|\left[\lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ \lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ 0\right]\right| = 4$

#47: $\mathrm{SOLVE}\left(\left|\left[\lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ \lambda\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ 0\right]\right| = 4,\ \lambda\right)$

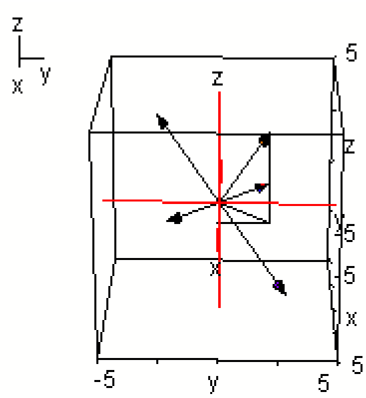
#48: $$\lambda = \frac{4}{3}$$

#49: Also gilt:

#50: $\mathrm{sv2c} := \left[\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot\sqrt{2}\right),\ 3\right]$

#51: $\mathrm{sv2c} := [-\ 2\cdot\sqrt{2},\ -\ 2\cdot\sqrt{2},\ 3]$

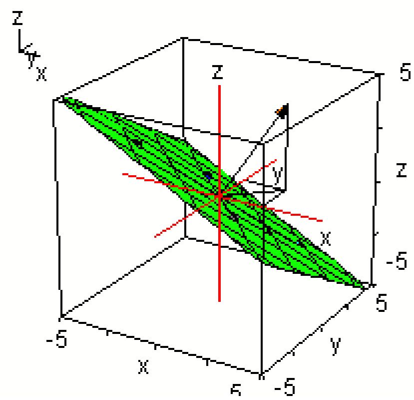
#52: $\mathrm{sv2d} := [2\cdot\sqrt{2},\ 2\cdot\sqrt{2},\ -3]$



#53: Die Ebene dazu:

#54: $\mathrm{ebene\_sv2}(\lambda,\ \mu) := [0,\ 0,\ 0] + \lambda\cdot\mathrm{sv2a} + \mu\cdot\mathrm{sv2c}$

#55: $\text{ebene\_sv2}(\lambda, \mu) := \lambda\cdot\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, 0\right] + \mu\cdot[-2\cdot\sqrt{2}, -2\cdot\sqrt{2}, 3]$



#56: Wir betrachten das SKP von v2 mit den Ebenenvektoren:

#57: $$\text{ebene\_sv2}(\lambda, \mu)\cdot v2 = 0$$

#58: $$\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\lambda}{2} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\mu, -\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\lambda}{2} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\mu, 3\cdot\mu\right]\cdot\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, 4\right] = 0$$

#59: --

#60: Auch die zu v2 senkrechten Vektoren sind die, deren SKP mit v2 null ergibt!

#61: --

#62: Merke:

#63: Die zu einem Vektor senkrechten Vektoren sind alle die, deren Skalarprodukt mit dem Vektor null ergibt.

#64: --