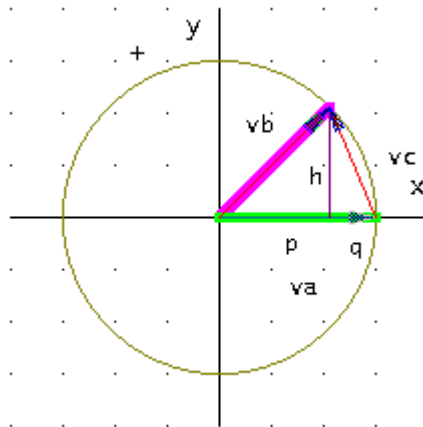


- #1: Berechnung des Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren
- #2: -----
- #3: Vorüberlegung:
- #4: Wenn die Vektoren nicht kollinear sind, dann bestimmen sie eine Ebene.
- #5: Der gesuchte Winkel ist der Winkel in dieser Ebene.
- #6: Der Winkel bleibt gleich, wenn ich beide Vektoren auf die Länge 1 kürze.
- #7: Wir können also die Überlegungen im Einheitskreis in der Ebene anstellen.
- #8: -----
- #9: Es seien  $v_a$  und  $v_b$  mit Länge 1 gegeben:
- #10:  $v_a := [a_1, a_2, a_3]$
- #11:  $v_b := [b_1, b_2, b_3]$



- #12: -----
- #13: Dann gilt offensichtlich, dass  $p$  der Cosinus des Winkels ist:
- #14:  $\cos(\alpha) = p$
- #15: Also ist der gesuchte Winkel der Arcuscosinus von  $p$ .
- #16:  $\alpha = \arccos(p)$
- #17: Zu bestimmen ist also -nur- die Länge der Strecke  $p$ !
- #18: -----
- #19: Wir brauchen zur Berechnung des Dreiecks die Länge des Vektors der

von  $v_a$  nach  $v_b$  führt!

#20:  $v_c := v_b - v_a$

#21:  $|v_c|^2 = |v_b - v_a|^2$

#22:  $|v_c|^2 = \sqrt{((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)}$

#23:  $|v_c|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

#24:  $|v_c|^2 = a_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + a_2^2 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_3^2 - 2 \cdot a_3 \cdot b_3 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

#25:  $|v_c|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$

#26:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 + |v_b|^2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$

#27: Beträge von  $v_a$  und  $v_b$  sind jeweils 1:

#28:  $|v_c|^2 = 2 - 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$

#29: Weil der Ausdruck rechts immer wieder vorkommt, hat er einen eigenen Namen.

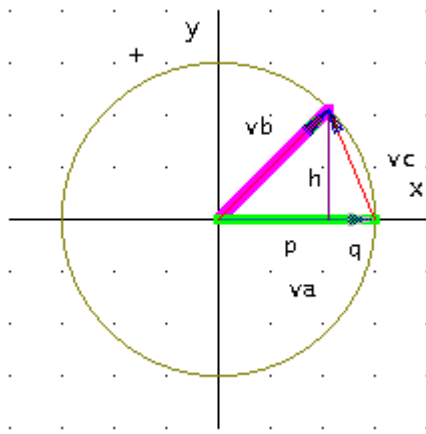
#30: Er heißt Skalarprodukt der Vektoren  $v_a$  und  $v_b$ :

#31:  $SKP_{v_a v_b} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

#32: Also gilt:

#33:  $|v_c|^2 = 2 - 2 \cdot SKP_{v_a v_b}$

#34: -----



#35: Im gezeichneten Dreieck gilt:

#36:  $p^2 + h^2 = |vb|^2$

#37:  $q^2 + h^2 = |vc|^2$

#38:  $p + q = |va|$

#39: -----

#40: Es gilt:  $|va|=1$  und  $|vb|=1$  und

#41:  $|vc|^2 = 2 - 2 \cdot \text{SKP}vavb$ , also:

#42: -----

#43:  $p^2 + h^2 = 1$

#44:  $q^2 + h^2 = 2 - 2 \cdot \text{SKP}vavb$

#45:  $p + q = 1$

#46: -----

#47:  $q = 1 - p$  aus der 3. Gleichung können wir in die 2. Gleichung einsetzen.

#48: -----

#49:  $p^2 + h^2 = 1$

#50:  $(1 - p)^2 + h^2 = 2 - 2 \cdot \text{SKP}vavb$

#51: -----

#52:  $h^2 = 1 - p^2$  aus Glchg 1 setzen wir in Glchg 2 ein:

#53: -----

$$\#54: (1 - p)^2 + 1 - p^2 = 2 - 2 \cdot \text{SKPvavb}$$

$$\#55: 1 - 2 \cdot p + p^2 + 1 - p^2 = 2 - 2 \cdot \text{SKPvavb}$$

$$\#56: 2 - 2 \cdot p = 2 - 2 \cdot \text{SKPvavb}$$

$$\#57: - 2 \cdot p = - 2 \cdot \text{SKPvavb}$$

$$\#58: p = \text{SKPvavb}$$

$$\#59: p = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

#60: Damit ist p bestimmt. Es ist einfach das Skalarprodukt von va und vb.

#61: Merke: Die Länge der Projektion von einem Vektor auf einen anderen ist das Skalarprodukt, wenn beide Vektoren die Länge 1 haben.

#62: Merke: Der Winkel zwischen zwei Einheitsvektoren ist der Arcuscosinus des Skalarprodukts.

#63: -----

#64: Das Skalarprodukt schreibt man einfach mit einem Punkt zwischen den Vektoren:

$$\#65: [a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3] = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

#66: Der Winkel zwischen va und vb ist also:

$$\#67: \text{ACOS}([a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3])$$

#68: oder:

$$\#69: \text{ACOS}(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)$$

#70: Beispiel:

$$\#71: \frac{\text{ACOS}\left(\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14}\right]\right)}{1^\circ} = 22.20765429$$

#72: 22 Grad

#73: -----

#74: Das gilt bisher nur für Vektoren der Länge 1.

#75: Ist das nicht gegeben, dann kürzen wir die Vektoren auf Länge 1 !

#76:  $v_x := [x_1, x_2, x_3]$

#77:  $v_y := [y_1, y_2, y_3]$

#78:  $v_{xe} := \frac{v_x}{|v_x|}$

#79:  $v_{ye} := \frac{v_y}{|v_y|}$

#80: Winkel zwischen  $v_x$  und  $v_y$ :

#81:  $\text{ACOS}(v_{xe} \cdot v_{ye})$

#82:  $\text{ACOS}\left(\frac{v_x}{|v_x|} \cdot \frac{v_y}{|v_y|}\right)$

#83:  $\text{ACOS}\left(\frac{v_x \cdot v_y}{|v_x| \cdot |v_y|}\right)$

#84: -----

#85: Merke: Der Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren ist der Arcuscosinus des Skalarprodukts der auf Länge 1 normierten Vektoren.

#86: -----

#87: Beispiel mit zwei wild gewählten Vektoren:

#88:  $[1, 2, 3]$

#89:  $[4, -2, 5]$

#90: 
$$\frac{\text{ACOS}\left(\frac{[1, 2, 3] \cdot [4, -2, 5]}{|[1, 2, 3]| \cdot |[4, -2, 5]|}\right)}{1^\circ}$$

#91: 
$$\frac{\text{ACOT}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{1^\circ} = 53.30077479$$

#92: Der Winkel beträgt 53 Grad.

#93: -----

#94: Nun weiß jeder, dass der Cosinus von  $90^\circ$  null ist:

#95:  $\cos(90^\circ) = 0$

#96: Also ergibt der Arcuscosinus  $90^\circ$ , wenn das Skalarprodukt null ist:

#97: 
$$\frac{\arccos(0)}{1^\circ} = 90$$

#98: Merke: Der Winkel zwischen zwei Vektoren beträgt  $90^\circ$ , wenn deren Skalarprodukt null ist!

#99: -----

#100: -----