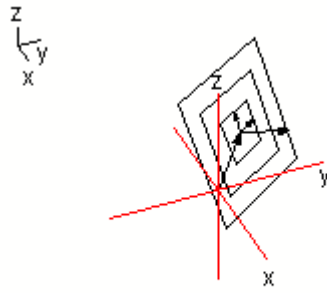


```

#1: Parameterfreie Formen der Ebenengleichung!
#2: -----
#3: Behauptung: Alle [x,y,z], welche eine Gleichung der folgenden Form
    erfüllen, bilden eine Ebene.
#4: a·x + b·y + c·z + d = 0
#5: -----
#6: Gegeben sei eine Ebene durch folgende Vektoren:
#7: va := [-1, 1.5, 2]
#8: vri1 := [ - 2·√13, 3·√13, 0 ]
           [ 13, 13 ]
#9: vri2 := [ - 9·√793, - 6·√793, 2·√793 ]
           [ 793, 793, 61 ]
#10: Ein Normalenvektor ist vn:
#11: vn := [ 2, 4, 1 ]
           [ 3 ]
#12: eben(s, t) := va + s·vri1 + t·vri2
#13: ---- Zeichnung -----
#14: LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz3D.mth)
#15: vo := [0, 0, 0]
#16: Vektor3D(vo, va, 0.2, 0.5)
#17: Vektor3D(va, va + vri1, 0.2, 0.5)
#18: Vektor3D(va, va + vri2, 0.2, 0.5)
#19: Vektor3D(va, va + vn, 0.2, 0.5)
#20: quadrat(1) := [eben(1, 1), eben(-1, 1), eben(-1, -1), eben(1, -1),
    eben(1, 1)]
#21: quadrat(1)
#22: quadrat(2)
#23: quadrat(3)

```



#24: -----

#25: Die Vektoren, die zur Ebene hinführen sind Vektoren der Form

$[x,y,z]$ :

#26:  $ve := [x, y, z]$

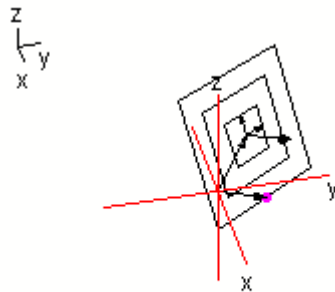
#27: Ein Beispiel:

#28:  $veBsp1 := eben(0, -3)$

#29:  $veBsp1 := \left[ -\frac{25298}{614001}, \frac{4322619}{2020672}, -\frac{1291871}{1678057} \right]$

#30:  $veBsp1 = [-0.04120188729, 2.139198741, -0.7698612144]$

#31:  $Vektor3D(vo, veBsp1, 0.2, 0.5)$



#32: Die Vektoren die INNERHALB der Ebene liegen, lassen sich als

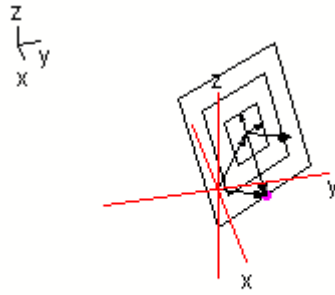
Differenz der Vektoren, die zur Ebene hinführen mit dem

Stützvektor darstellen. Also haben sie die Form:  $ve-va$  .

#33: Beispiel: Der Vektor  $(veBsp1 - va)$  liegt innerhalb der Ebene.

Zeichnung dazu:

#34:  $Vektor3D(va, va + (veBsp1 - va), 0.2, 0.5)$



#35: Der Normalenvektor einer Ebene steht nicht auf den Vektoren senkrecht die zur Ebene hinführen, sondern auf denen, die in der Ebene liegen, also auf  $v_e - v_a$  !

#36:  $(v_e - v_a) \cdot v_n = 0$

#37: --- Beispiel: -----

#38:  $\left[ \left[ 1, -1.5, 2 \right] - \left[ -1, \frac{3}{2}, 2 \right] \right] \cdot \left[ 2, \frac{4}{3}, 1 \right]$

#39:  $\left[ 1, -1.5, 2 \right] \cdot \left[ 2, \frac{4}{3}, 1 \right] - \left[ -1, \frac{3}{2}, 2 \right] \cdot \left[ 2, \frac{4}{3}, 1 \right]$

#40:  $\left( 1 \cdot 2 + \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 1 \right) - \left( (-1) \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 1 \right)$

#41:  $2 - 2$

#42:  $0$

#43: --- Ende Beispiel: -----

#44: --- Wir formen um:

#45:  $(v_e - v_a) \cdot v_n = 0$

#46:  $v_e \cdot v_n - v_a \cdot v_n = 0$

#47:  $v_e \cdot v_n = v_a \cdot v_n$

#48: --- Das ist die allgemeine Normalengleichung der Ebene! Beispiel:

#49:  $[x, y, z] \cdot \left[ 2, \frac{4}{3}, 1 \right] = [-1, 1.5, 2] \cdot \left[ 2, \frac{4}{3}, 1 \right]$

#50: --- Wir formen um:

#51:  $2 \cdot x + \frac{4 \cdot y}{3} + z = 2$

#52: Man sieht links die Normale  $[2, 4/3, 1]$ .

#53: Wenn man durch 2 teilt, ergibt sich:

#54:  $x + \frac{2 \cdot y}{3} + \frac{1}{2} \cdot z = 1$

#55: Man sieht links die halbierte Normale  $[1, 2/3, 1/2]$ .

#56: --- Wir formen um:

#57:  $\frac{x}{1} + \frac{y}{1.5} + \frac{z}{2} = 1$

#58: Alle  $[x, y, z]$ , die diese Gleichung erfüllen, sind Vektoren die zur Ebene hinführen!

#59: Das ist die parameterfreie Form der Ebenengleichung in Achsenabschnittsform!

#60: Man sieht sofort die Spurpunkte bzw. Achsenabschnitte:  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1.5, 0]$  und  $[0, 0, 2]$  und die Normale  $[1/1, 1/1.5, 1/2]$ .

#61: -----

#62: Für eine Darstellung ohne Brüche multiplizieren wir mit 3:

#63:  $\frac{x}{1} + \frac{y}{1.5} + \frac{z}{2} = 1$

#64:  $3 \cdot x + 2 \cdot y + 1.5 \cdot z = 3$

#65:  $3 \cdot x + 2 \cdot y + 1.5 \cdot z - 3 = 0$

#66:  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

#67: Das ist die allgemeine parameterfreie Form der Ebenengleichung!

#68: -----

#69: Zusammenfassung

#70: Eine Ebene mit Parametern ist gegeben durch:

#71:  $\text{eben}(s, t) := v_a + s \cdot v_{ri1} + t \cdot v_{ri2}$

#72: Wenn man eine Normale gefunden hat, lassen sich die Ebenenvektoren

[x,y,z] darstellen durch:

#73:  $[x, y, z] \cdot v_n = v_a \cdot v_n$

#74: Beispiel:

#75:  $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] = 4$

#76: Wenn der Normalenvektor auf 1 normiert ist, heißt die Normalenform auch HESSE-Form.

#77: Die Normalenform kann man so umformen, dass rechts 1 steht:

#78:  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

#79: Aus dieser Form kann man die Achsenabschnitte und einen Normalenvektor ablesen.

#80: Wenn man die Brüche eliminiert, ergibt sich:

#81:  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

#82: die allgemeine parameterfreie Form der Ebenengleichung!

#83: Natürlich dürfen a,b,c und d nicht alle zugleich null sein!

#84: -----

#85: Experimentieren Sie mit den Faktoren a,b,c und d. (Derive zeichnet die Ebenen ohne Probleme.) Beispiele:

#86:  $1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + 4 = 0$

#87:  $1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 4 = 0$

#88:  $1 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z + 1 = 0$

#89: -----