

#1: Normalenform von Ebenen, speziell Hesseform

#2: -----

#3: Definition:

#4: Ein Vektor, der zu einer Ebene senkrecht steht, heißt
 'Normalenvektor' der Ebene.

#5: Hat dieser die Länge 1, so heißt er 'Normaleneinheitsvektor' der
 Ebene.

#6: -----

#7: Alle Vektoren, die zu einem Vektor senkrecht sind, bilden eine
 Ebene im Ursprung.

#8: Beispiel:

#9: $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] = 0$

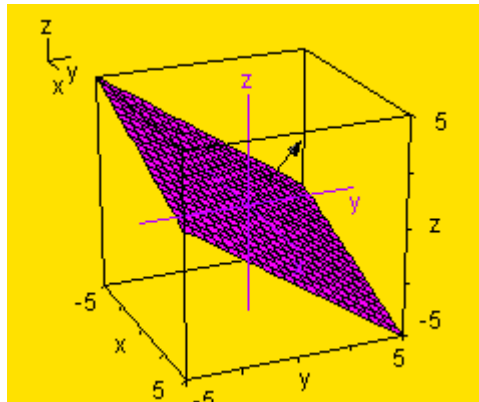
#10: $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0$

#11: --- Zeichnung ---

#12: `LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz3D.mth)`

#13: `vo := [0, 0, 0]`

#14: `Vektor3D(vo, [1, 2, 3], 0.2, 0.6)`



#15: Die Ebene geht durch den Ursprung, weil $[0,0,0]$ die Gleichung
 erfüllt:

#16: $[0, 0, 0] \cdot [1, 2, 3] = 0$

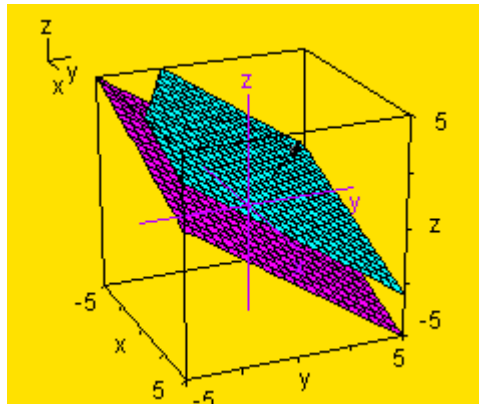
#17: -----

#18: Wenn man von $[x,y,z]$ einen Vektor abzieht, verschiebt man die

Ebene!

#19: Beispiel:

#20: $([x, y, z] - [1, 1, 1]) \cdot [1, 2, 3] = 0$



#21: Die Ebene geht jetzt durch $[1,1,1]$, weil $[1,1,1]$ für $[x,y,z]$ eingesetzt die Gleichung erfüllt:

#22: $([1, 1, 1] - [1, 1, 1]) \cdot [1, 2, 3] = 0$

#23: -----

#24: Wir formen die Gleichung der verschobenen Ebene etwas um:

#25: $([x, y, z] - [1, 1, 1]) \cdot [1, 2, 3] = 0$

#26: Wir multiplizieren aus:

#27: $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] - [1, 1, 1] \cdot [1, 2, 3] = 0$

#28: $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] = [1, 1, 1] \cdot [1, 2, 3]$

#29: $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] = 6$

#30: -----

#31: Das ist die Normalenform der Ebenengleichung. Allgemein:

#32: $[x, y, z] \cdot [a, b, c] = k$

#33: $[x,y,z]$ ist ein Ebenenvektor, $[a,b,c]$ ist der Normalenvektor, $k \neq 0$ zeigt an, dass die Ebene aus dem Ursprung verschoben ist.

#34: -----

#35: -----

#36: Noch besser zu erkennen ist die Lage der Ebene, wenn der Normalenvektor die Länge 1 hat:

$$\#37: \text{vnorm1} := \frac{[1, 2, 3]}{|[1, 2, 3]|}$$

$$\#38: \text{vnorm1} = \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \right]$$

#39: Die Ebenengleichung ist mit jedem Normlenvektor möglich, auch mit einem der Länge 1:

$$\#40: ([x, y, z] - [1, 1, 1]) \cdot \text{vnorm1} = 0$$

$$\#41: [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} - [1, 1, 1] \cdot \text{vnorm1} = 0$$

$$\#42: [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} = [1, 1, 1] \cdot \text{vnorm1}$$

#43: Die rechte Seite ergibt eine Zahl:

$$\#44: [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} = [1, 1, 1] \cdot \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \right]$$

$$\#45: [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7}$$

$$\#46: [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} = 1.603567451$$

#47: Die Zahl rechts zeigt jetzt den Abstand der Ebene vom Ursprung an. Das wird nun erklärt.

#48: Der Vektor vnorm1 hat die Länge 1. Wenn ich vnorm1 z.B. mit dem Faktor 3 verlängere und auf die Ebene stoße, dann ist der Abstand der Ebene vom Ursprung gerade 3..

#49: Ich behaupte, dass $[x,y,z]=1.6 \cdot \text{vnorm1}$ ein Ebenenvektor ist. $1.6 \cdot \text{vnorm1}$ muss also die obige Normalengleichung erfüllen:

$$\#50: \left(\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7} \cdot \text{vnorm1} \right) \cdot \text{vnorm1} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7}$$

$$\#51: \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7} \cdot (\text{vnorm1} \cdot \text{vnorm1}) = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7}$$

#52: $\text{vnorm1} \cdot \text{vnorm1}$ muss 1 sein, denn $[a,b,c] \cdot [a,b,c] = a^2 + b^2 + c^2$.

Vektor mal gleicher Vektor ist die Summe der

Komponentenquadrate. Und die ist 1, wenn der Betrag des Vektors

1 war.

$$\#53: \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7} \cdot 1 = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{7}$$

#54: D.h., dass $(3 \cdot \sqrt{14} / 7 \cdot \text{vnorm1})$ ein Ebenenvektor ist. Also hat die Ebene vom Ursprung den Abstand $3 \cdot \sqrt{14} / 7$.

#55: -----

#56: Die Form $[x, y, z] \cdot \text{Normaleneinheitsvektor} = \text{Zahl}$ heißt HESSE-Form der Normalengleichung:

$$\#57: \quad \quad \quad [x, y, z] \cdot \text{vnorm1} = k$$

#58: In dieser Form ist k der Abstand der Ebene vom Ursprung. Dabei muss jedoch der Normaleneinheitsvektor zur Ebene hinzeigen, nicht von ihr weg, sonst ist k negativ.

#59: -----