

#1: Umwandlung von Ebenenformen

#2: hier: Von der Punkt-Richtungsform zur Normalenform und zur Hesseform

#3: -----

#4: -----

#5: Gegeben sei eine Ebene:

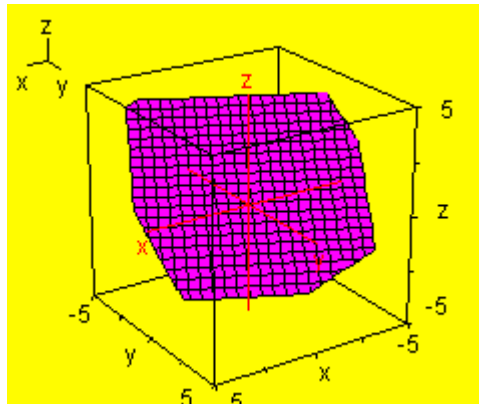
#6: $va := \left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7} \right]$

#7: $vri1 := \left[-\frac{930249}{1040050}, \frac{930249}{2080100}, 0 \right]$

#8: $vri2 := \left[-\frac{477902}{1332805}, -\frac{1695247}{2363909}, \frac{2188209}{3661574} \right]$

#9: Ebene in P-R-Form:

#10: $ev(\lambda, \mu) := va + \lambda \cdot vri1 + \mu \cdot vri2$



#11: -----

#12: Gesucht ist eine Normalenform und die Hesseform.

#13: Wiederholung Normalenform:

#14: Es sei $ve=[x,y,z]$ ein Vektor der zur Ebene hinführt und va ein Stützvektor, dann liegt $(ve-va)$ IN der Ebene. Die Vektoren in der Ebene stehen auf dem Normalenvektor senkrecht. D.h.:

#15: $(ve - va) \cdot vn = 0$

#16: $ve \cdot vn - va \cdot vn = 0$

#17: $ve \cdot vn = va \cdot vn$

#18: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = k$

#19: -----

#20: Die Normale steht auf den Vektoren, die in der Ebene liegen,
senkrecht, also speziell auf den Richtungsvektoren der Ebene:

#21: $vn := [x, y, z]$

#22: $vn \cdot vri1 = 0 \wedge vn \cdot vri2 = 0$

#23: Das sind zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Ich gebe deshalb
z.B. $z=3$ vor:

#24: $vn \cdot vri1 = 0 \wedge vn \cdot vri2 = 0 \wedge z = 3$

#25: $SOLVE(vn \cdot vri1 = 0 \wedge vn \cdot vri2 = 0 \wedge z = 3, [x, y, z])$

#26: $x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3$

#27: Ein Normalenvektor ist also:

#28: $vnLsg := [1, 2, 3]$

#29: -----

#30: Die Normalenform lautet: $[x,y,z] \cdot \text{Normale} = k$. Dabei ist $[x,y,z]$
ein Ebenenvektor und k eine Zahl.

#31: Zu bestimmen ist also k !

#32: -----

#33: Das Skalarprodukt eines jeden Ebenenvektors mit der Normale muss k
ergeben.

#34: Ein beliebig gewählter Ebenenvektor ist z.B. $ev(1,1)$. Ich berechne
einfach das Produkt $ev(1,1) \cdot vnLsg$:

#35: $ev(1, 1) \cdot vnLsg = 4$

#36: Ich könnte aber auch $ev(2,-1)$ wählen:

#37: $ev(2, -1) \cdot vnLsg = 4$

#38: Es muss mit jedem Ebenenvektor funktionieren, also auch mit
 $ev(0,0)$:

#39: $ev(0, 0) \cdot vnLsg = 4$

#40: $ev(0,0)$ ist aber der Stützvektor va !

#41:
$$ev(0, 0) = \left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7} \right]$$

#42: $ev(0, 0) = va$

#43: Merke: Stützvektor mal Normale ergibt k .

#44: -----

#45: Hier hat die Ebene hat in Normalenform also die Gleichung

#46: $[x, y, z] \cdot [1, 2, 3] = 4$

#47: Und in HESSE-Form hat die Ebene die Gleichung

#48:
$$[x, y, z] \cdot \frac{[1, 2, 3]}{|[1, 2, 3]|} = \frac{4}{|[1, 2, 3]|}$$

#49:
$$[x, y, z] \cdot \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \right] = \frac{2 \cdot \sqrt{14}}{7}$$

#50:
$$[x, y, z] \cdot \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \right] = 1.069044967$$

#51: -----

#52: Im Allgemeinen gilt also:

#53: 1. Wenn eine Ebene $ev(\lambda, \mu) = va + \lambda \cdot vri1 + \mu \cdot vri2$ gegeben ist, und eine Normalenform gesucht ist, dann bestimme man zuerst einen beliebigen Normalenvektor aus den Richtungsvektoren $vri1$ und $vri2$.

#54: 2. Für die Form $[x,y,z] \cdot \text{Normalenvektor} = k$ findet man die Zahl k , indem man das Skalarprodukt des Stützvektors der Ebene mit dem Normalenvektor bildet.

#55: Wenn man die Normalenform hat, dann bildet man die Hesse-Form einfach, indem man beide Seiten der Normalenform durch den Betrag des Normalenvektors teilt!

#56: -----

#57: Wiederholung:

#58: In der HESSE-Form $[x,y,z] \cdot \mathbf{v}_{ne} = a$ gibt a den Abstand der Ebene vom Ursprung an, wenn \mathbf{v}_{ne} den Betrag 1 hat. Warum?

#59: $[x, y, z] \cdot \mathbf{v}_{ne} = a$

#60: Die Verlängerung von \mathbf{v}_{ne} , also $k \cdot \mathbf{v}_{ne}$, muss die Ebene treffen, also ein Ebenenvektor sein. Da \mathbf{v}_{ne} die Länge 1 hat, gibt k dann den Abstand der Ebene vom Ursprung an:

#61: $(k \cdot \mathbf{v}_{ne}) \cdot \mathbf{v}_{ne} = a$

#62: $k \cdot (\mathbf{v}_{ne} \cdot \mathbf{v}_{ne}) = a$

#63: Das SKP eines Vektors mit sich selbst ist aber das Quadrat des Betrages:

#64: $[1, 2, 3] \cdot [1, 2, 3] = 1^2 + 2^2 + 3^2$

#65: $1^2 + 2^2 + 3^2 = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)^2} = |[1, 2, 3]|^2$

#66: Da \mathbf{v}_{ne} den Betrag 1 hat, ist das Quadrat davon auch 1. Also gilt:

#67: $k \cdot (\mathbf{v}_{ne} \cdot \mathbf{v}_{ne}) = a$

#68: $k \cdot 1 = a$

#69: $k = a$

#70: Also ist a der Abstand der Ebene vom Ursprung.

#71: -----