

- #1: Kreuzprodukt 2: Herleitung der Formel
- #2: -----
- #3: Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren.
- #4:  $va := [a1, a2, a3]$
- #5:  $vb := [b1, b2, b3]$
- #6: Gesucht ist ein Vektor  $vc$ , der auf  $va$  und  $vb$  senkrecht steht, der mit diesen ein Rechtssystem bildet und der als Betrag die Fläche des von  $va$  und  $vb$  aufgespannten parallelogramms hat.
- #7: Es soll also gelten:
- #8:  $vc := [x, y, z]$
- #9:  $vc \cdot va = 0$
- #10:  $vc \cdot vb = 0$
- #11:  $|vc| = |va| \cdot |vb| \cdot \sin(\alpha)$
- #12:  $va, vb$  und  $vc$  bilden Rechtssystem.
- #13: -----
- #14: -----
- #15: Wir betrachten zunächst nur die ersten beiden Bedingungen:
- #16:  $vc \cdot va = 0 \wedge vc \cdot vb = 0$
- #17:  $[x, y, z] \cdot va = 0 \wedge [x, y, z] \cdot vb = 0$
- #18:  $[x, y, z] \cdot [a1, a2, a3] = 0 \wedge [x, y, z] \cdot [b1, b2, b3] = 0$
- #19:  $a1 \cdot x + a2 \cdot y + a3 \cdot z = 0 \wedge b1 \cdot x + b2 \cdot y + b3 \cdot z = 0$
- #20: Zwei Gleichungen mit drei Variablen  $x, y$  und  $z$ . Wir lassen zunächst  $z$  beliebig.
- #21:  $\text{SOLVE}(a1 \cdot x + a2 \cdot y + a3 \cdot z = 0 \wedge b1 \cdot x + b2 \cdot y + b3 \cdot z = 0, [x, y, z])$
- #22:  $x + \frac{z \cdot (a3 \cdot b2 - a2 \cdot b3)}{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1} = 0 \wedge y + \frac{z \cdot (a1 \cdot b3 - a3 \cdot b1)}{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1} = 0$
- #23: Offensichtlich ist es günstig für  $z$  die Differenz  $(a1b2 - a2b1)$  zu setzen:
- #24:  $a1 \cdot x + a2 \cdot y + a3 \cdot z = 0 \wedge b1 \cdot x + b2 \cdot y + b3 \cdot z = 0 \wedge z = a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1$

#25: SOLVE( $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = 0 \wedge b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot z = 0 \wedge z = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ , [x, y, z])

#26:  $x = a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \wedge y = a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \wedge z = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

#27: Der gesuchte Vektor  $v_c$  könnte also sein:

#28:  $v_{cLsg} := [a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1]$

#29: -----

#30: Wir prüfen, ob er die vier Bedingungen erfüllt:

#31: Es gilt selbstverständlich, dass  $v_{cLsg}$  senkrecht auf  $v_a$  und  $v_b$  steht:

#32:  $v_{cLsg} \cdot v_a = 0$

#33:  $v_{cLsg} \cdot v_b = 0$

#34: Der Betrag von  $v_{cLsg}$  ist die Wurzel aus der Summe der Komponentenquadrate:

#35:  $|v_{cLsg}| = \sqrt{(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}$

#36: Ist der Betrag gleich  $ABS(v_a) \cdot ABS(v_b) \cdot SIN(\alpha)$  ?

#37: Wir formen die Bedingung um:

#38:  $|v_c| = |v_a| \cdot |v_b| \cdot SIN(\alpha)$

#39:  $|v_c|^2 = (|v_a| \cdot |v_b| \cdot SIN(\alpha))^2$

#40:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 \cdot SIN(\alpha)^2$

#41:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 \cdot (1 - COS(\alpha)^2)$

#42:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 - |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 \cdot COS(\alpha)^2$

#43:  $COS(\alpha)$  ist das Skalarprodukt der normierten Vektoren  $v_a$  und  $v_b$ :

#44:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 - |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 \cdot \frac{(v_a \cdot v_b)^2}{|v_a|^2 \cdot |v_b|^2}$

#45:  $|v_c|^2 = |v_a|^2 \cdot |v_b|^2 - (v_a \cdot v_b)^2$

$$\begin{aligned} \#46: \quad |vc|^2 &= (a_1^2 \cdot b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_1^2 \cdot b_3^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_3^2 \\ &+ a_3^2 \cdot b_1^2 + a_3^2 \cdot b_2^2 + a_3^2 \cdot b_3^2) - (a_1^2 \cdot b_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 + \\ &2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_2^2 \cdot b_2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_3^2 \cdot b_3^2) \end{aligned}$$

#47: Die Quadrate von  $a_1b_1$ ,  $a_2b_2$  und  $a_3b_3$  heben sich weg:

$$\begin{aligned} \#48: \quad |vc|^2 &= a_1^2 \cdot b_2^2 + a_1^2 \cdot b_3^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3 + \\ &a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_3^2 - 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_3^2 \cdot b_1^2 + a_3^2 \cdot b_2^2 \end{aligned}$$

#49: Wir sortieren:

$$\begin{aligned} \#50: \quad |vc|^2 &= (a_2^2 \cdot b_3^2 - 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_3^2 \cdot b_2^2) + (a_1^2 \cdot b_3^2 - \\ &2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_3^2 \cdot b_1^2) + (a_1^2 \cdot b_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 + a_2^2 \cdot b_1^2) \end{aligned}$$

$$\#51: \quad |vc|^2 = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2$$

#52: Also gilt:

$$\#53: \quad |vc| = \sqrt{((a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2)}$$

#54: Das ist identisch mit  $\text{abs}(vc_{Lsg})$ .

#55: -----

#56: Damit sind die ersten drei Bedingungen erfüllt:  $vc_{Lsg}$  steht senkrecht auf  $va$  und  $vb$  und der Betrag ist der des von  $va$  und  $vb$  aufgespannten Parallelogramms.

#57: Die vierte Bedingung (Rechtssystem) kann ich hier nicht zeigen, weil wir das Skalarprodukt noch nicht behandelt haben, sie ist aber erfüllt.

#58: -----