#1: Projektion eines Vektors auf einen anderen

#2: --

#3: Zeichnungen vorweg:

#4: LOAD(C:\ProgMath\Derive61\Math\VekSpitz3D.mth)

#5: vo := [0, 0, 0]

#6: v1 := [0, 2, 3]

#7: v2 := [0, 4, 0]

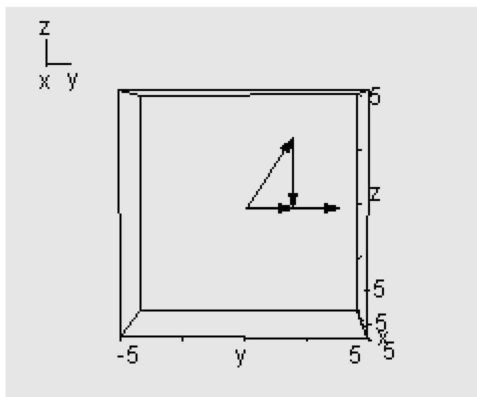
#8: v3 := [0, -4, 0]

#9: Vektor3D(vo, v1, 0.2, 0.6)

#10: Vektor3D(vo, v2, 0.2, 0.6)

#11: Vektor3D(v1, [0, 2, 0], 0.2, 0.6)

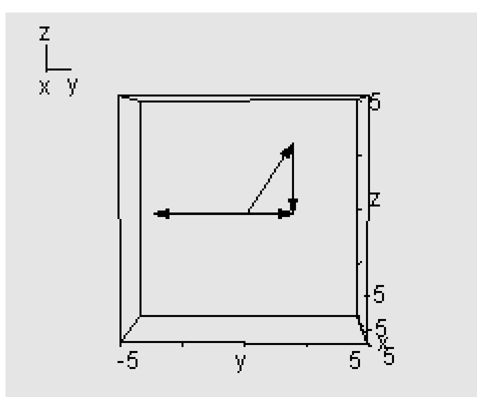
#12: Vektor3D(vo, [0, 2, 0], 0.2, 0.6)



#13: Man fälle das Lot von einem Vektor auf einen zweiten.

#14: Der Teilvektor, der sich auf dem zweiten ergibt, heißt Projektion von Vektor 1 auf Vektor 2.

#15: Vektor3D(vo, v3, 0.2, 0.6)

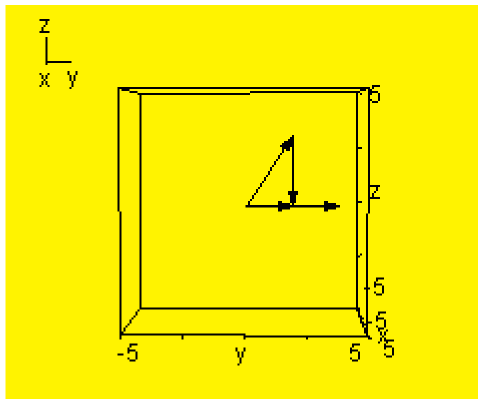


#16: Wenn der Winkel zwischen v1 und v2 stumpf ist, wie hier, dann liegt die Projektion 'außerhalb' von v2.

#17: --

#18: Herleitung der Projektionsformel

#19: vc sei der nach oben gerichtete Vektor, vd der liegende, vp der Projektionsvektor.



#20: $vc := [c_1, c_2, c_3]$

#21: $vd := [d_1, d_2, d_3]$

#22: $vp := [p_1, p_2, p_3]$

#23: Der Vektor vp muss ein Teilstück des Vektors vd sein. Ich normiere vd und kann vp dann darstellen als:

#24: $vp = p \cdot \frac{vd}{|vd|}$

#25: Wenn die Vektoren so liegen wie oben, ist p die Länge von vp.

#26: Wenn β der spitze Winkel zwischen vc und vd ist, dann gilt nach Definition des SKP:

#27: $COS(\beta) = \frac{vc \bullet vd}{|vc| \cdot |vd|}$

#28: Andererseits gilt im Dreieck nach Definition des Cosinus auch:

#29: $COS(\beta) = \frac{p}{}$

$|vc|$

#30: Dann gilt die Gleichsetzung:

#31: $$\frac{p}{|vc|} = \frac{vc \bullet vd}{|vc| \cdot |vd|}$$

#32: $$p = \frac{vc \bullet vd}{|vc| \cdot |vd|} \cdot |vc|$$

#33: $$p = \frac{vc \bullet vd}{|vd|}$$

#34: p kann wegen des SKP neagtiv sein. Das ist der Fall, wenn der Winkel zwischen vd und vd stumpf ist.

#35: Aber in jedem Falle ist der Vektor der Projektion:

#36: $$vp = p \cdot \frac{vd}{|vd|}$$

#37: $$vp = \frac{vc \bullet vd}{|vd|} \cdot \frac{vd}{|vd|}$$

#38: $$vp = \frac{vc \bullet vd}{|vd|^2} \cdot vd$$

#39: $$vp = \frac{vc \bullet vd}{vd \bullet vd} \cdot vd$$

#40: --

#41: Merke: Der Vektor der Projektion von Vektor vc auf vd ist:

#42: $$PROJ(vc, vd) := \frac{vc \bullet vd}{vd \bullet vd} \cdot vd$$

#43: Der Faktor, mit dem der Einheitsvektor vd/abs(vd) multipliziert wird, kann abkürzend geschrieben werden als:

#44: $$p = \frac{vc \bullet vd}{|vd|}$$

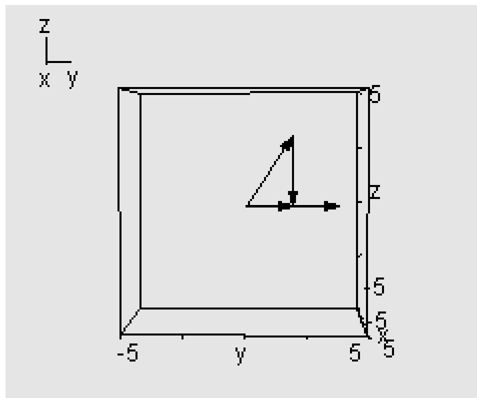
#45: Der Faktor ist negativ, wenn der Winkel zwischen vc und vd größer als 90° ist.

#46: Der Faktor ist null, wenn der Winkel zwischen vc und vd gleich 90° ist.

#47: Der Faktor ist positiv, wenn der Winkel zwischen vc und vd kleiner als 90° ist.

#48: --

#49: Beispiel 1 dazu (Winkel < 90°):



#50: $$\mathrm{PROJ}([0, 2, 3], [0, 4, 0]) = \frac{[0, 2, 3] \bullet [0, 4, 0]}{[0, 4, 0] \bullet [0, 4, 0]} \cdot [0, 4, 0]$$

#51: $$\mathrm{PROJ}([0, 2, 3], [0, 4, 0]) = [0, 2, 0]$$

#52: Der Faktor p ist:

#53: $$p = \frac{[0, 2, 3] \bullet [0, 4, 0]}{\left|[0, 4, 0]\right|}$$

#54: $$p = 2$$

#55: --

#56: Beispiel 2 dazu (Winkel = 90°):

#57: $$\mathrm{PROJ}([0, 0, 3], [0, 4, 0]) = \frac{[0, 0, 3] \bullet [0, 4, 0]}{[0, 4, 0] \bullet [0, 4, 0]} \cdot [0, 4, 0]$$

#58: $$\mathrm{PROJ}([0, 0, 3], [0, 4, 0]) = [0, 0, 0]$$

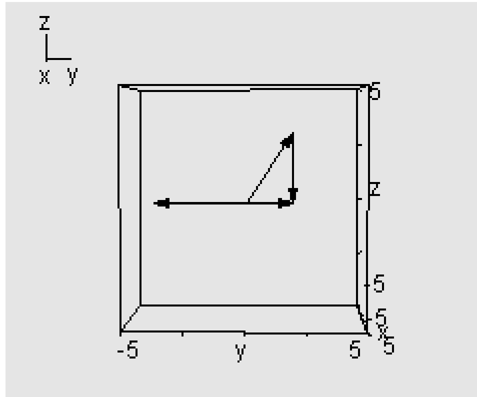
#59: Der Faktor p ist:

#60: $$p = \frac{[0, 0, 3] \bullet [0, 4, 0]}{\left|[0, 4, 0]\right|}$$

#61: $$p = 0$$

#62: --

#63: Beispiel 3 dazu (Winkel > 90°):



#64: $\text{PROJ}([0, 2, 3], [0, -4, 0]) = \dfrac{[0, 2, 3] \bullet [0, -4, 0]}{[0, -4, 0] \bullet [0, -4, 0]} \cdot [0, -4, 0]$

#65: $\text{PROJ}([0, 2, 3], [0, -4, 0]) = [0, 2, 0]$

#66: $p = \dfrac{[0, 2, 3] \bullet [0, -4, 0]}{|[0, -4, 0]|}$

#67: $p = -2$

#68: Der Vektor der Projektion ist der gleiche wie in Beispiel 1, aber der Faktor p ist negativ.

#69: --

#70: Achtung: Die Projektion von vc auf vd ist natürlich nicht dasselbe wie die Projektion von vd auf vc!

#71: $\text{PROJ}([0, 2, 3], [0, 4, 0]) = [0, 2, 0]$

#72: $\text{PROJ}([0, 4, 0], [0, 2, 3]) = \left[0, \dfrac{16}{13}, \dfrac{24}{13}\right]$

#73: --

#74: Merke: Der Vektor der Projektion von Vektor vc auf vd ist:

#75: $\text{PROJ}(vc, vd) := \dfrac{vc \bullet vd}{vd \bullet vd} \cdot vd$

#76: Der Faktor p, mit dem der Einheitsvektor (vd/|vd|) multipliziert wird, kann abkürzend geschrieben werden als:

#77: $p = \frac{vc \cdot vd}{|vd|}$

#78: Der Faktor p ist nicht der Betrag des Projektionsvektors, weil p auch negativ sein kann.

#79: Aber |p| ist der Betrag des Projektionsvektors.

#80: --