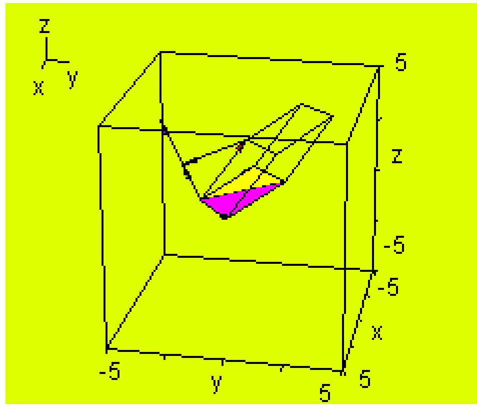
#1: Das Spatprodukt, Herleitung, Volumenformel und

#2: Beweis zu: va, vb und Kreuzprodukt bilden immer ein Rechtssystem

#3: ---------------------------------------

#4: Vorbetrachtung:



#5: va und vb seien die Vektoren, die die Grundfläche erzeugen.

#6: vc steht schräg nach oben über dieser Fläche.

#7: Ein Normalenvektor für die Ebene, die von va und vb erzeugt wird, ist das Kreuzprodukt va×vb. Das ist der Vektor, der links nach oben zeigt.

#8: Das Volumen des Spats ergibt sich aus Grundfläche mal Höhe.

#9: Die Höhe des Spats ist der zur Ebene senkrechte Anteil von vc.

#10: Diese Höhe ergibt sich aus der Projektion von vc auf den Normalenvektor.

#11: ---------------------------------------

#12: Das Volumen des Spats wird als Grundfläche mal Höhe berechnet.

#13: $V(va, vb, vc) := GF \cdot h$

#14: Es sei α der Winkel zwischen va und vb.

#15: Die Grundfläche hat als Maß den Betrag des Kreuzprodukts von va und vb:

#16: $GF := |va| \cdot |vb| \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)$

#17: oder

#18: $GF := |va \times vb|$

#19: Also gilt:

#20: $V(va, vb, vc) :\!= |va \times vb| \cdot h$

#21: Wir errechnen h als Projektion von vc auf die Normale zu va und vb, die Normale ist das Kreuzprodukt.

#22: Wenn vx auf vy projeziert wird, ist p=<vx;vy>/abs(vy) der Projektionsfaktor.(SKP durch Bertrag von vy). Hier also:

#23: $h :\!= \dfrac{vc \bullet va \times vb}{|va \times vb|}$

#24: Also gilt:

#25: $V(va, vb, vc) :\!= |va \times vb| \cdot \dfrac{vc \bullet va \times vb}{|va \times vb|}$

#26: Der Betrag des Kreuzprodukts kürzt sich weg und wir erhalten:

#27: ---------------------------------------

#28: $V(va, vb, vc) :\!= vc \bullet va \times vb$

#29: Das Volumen des Spats ist das Skalarprodukt des Kreuzprodukts der Grundflächenvektoren mit dem Höhenvektor.

#30: Weil die Höhe als Projektionsfaktor gewählt wurde kann V auch negativ sein.

#31: Das ist dann der Fall, wenn va, vb und vc in dieser Reihenfolge kein Rechssystem bilden.

#32: Man kann also das Spatprodukt zum Testen auf Rechts- oder Linkssystem benutzen.

#33: ---------------------------------------

#34: Beispiel 1, Test mit Würfelberechnung (Rechtssystem):

#35: V([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])

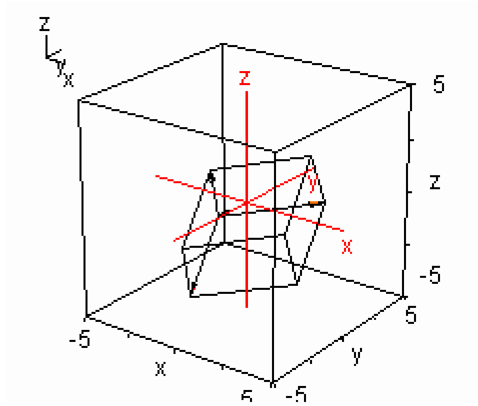
#36: 1

#37: ---------------------------------------

#38: Beispiel 2, Test mit 'negativer' Würfelberechnung (Linkssystem):

#39: V([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, -1])

```
#40:                                -1

#41:  ---------------------------------------

#42:  Beispiel 3, Test mit Linkssystem:

#43:  vo3 := [0, -2, 0]

#44:  va3 := [4, 2, 1]

#45:  vb3 := [-2, 2, 1]

#46:  vc3 := [0, -2, -3]

#47:  V(va3, vb3, vc3)

#48:                                -24

#49:  ---------------------------------------

#50:  Beispiel 4, Test mit Rechtssystem:

#51:  vo4 := [0, -2, 0]

#52:  va4 := [4, 2, 1]

#53:  vb4 := [-2, 2, 1]

#54:  vc4 := [0, 2, 3]

#55:  V(va4, vb4, vc4)

#56:                                24

#57:  ---------------------------------------

#58:  Beispiel 3, Zeichnung:

#59:  Vektor3D([0, 0, 0], vo3, 0.1, 0.6)

#60:  Vektor3D(vo3, vo3 + va3, 0.1, 0.6)

#61:  Vektor3D(vo3, vo3 + vb3, 0.1, 0.6)

#62:  Vektor3D(vo3, vo3 + vc3, 0.1, 0.6)

#63:  SpatPlot(vo3, va3, vb3, vc3)
```



#64: --

#65: Beispiel 4, Zeichnung:

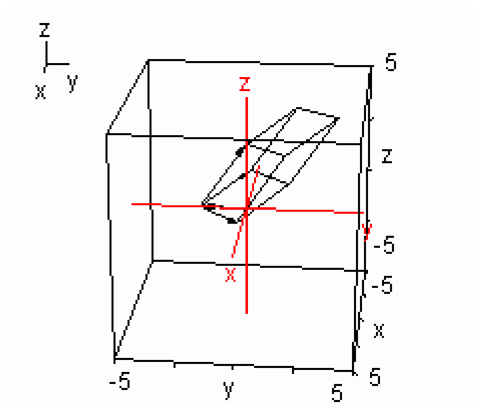
#66: Vektor3D([0, 0, 0], vo4, 0.1, 0.6)

#67: Vektor3D(vo4, vo4 + va4, 0.1, 0.6)

#68: Vektor3D(vo4, vo4 + vb4, 0.1, 0.6)

#69: Vektor3D(vo4, vo4 + vc4, 0.1, 0.6)

#70: SpatPlot(vo4, va4, vb4, vc4)



#71: --

#72: Testen auf Rechts- oder Linkssystem

#73: V(va4, vb4, vc4)

#74: 24

#75: va4, vb4, vc4 bilden ein Rechtssystem!

#76: V(va4, vc4, vb4)

#77: -24

#78: va4, vc4, vb4 bilden ein Linkssystem!

#79: --

#80: ---------------------------------------

#81: Satz: Wenn vc das Kreuzprodukt von va und vb ist, ergibt sich immer ein Rechtssystem!

#82: Beispiel:

#83: $V(va4, vb4, va4 \times vb4)$

#84: 180

#85: Allgemeiner Beweis:

#86: Es sei vc das Kreuzprodukt von va und vb. Dann gilt:

#87: $V(va, vb, vc) = vc \bullet va \times vb$

#88: $V(va, vb, vc) = va \times vb \bullet va \times vb$

#89: Das SKP eines Vektors mit sich selbst ist aber die Summe der Komponentenquadrate:

#90: $V(va, vb, vc) = (va \times vb)_1^2 + (va \times vb)_2^2 + (va \times vb)_3^2$

#91: Das muss wegen der Quadrate positiv sein.

#92: Also bilden va, vb und va×vb in dieser Reihenfolge immer ein Rechtssystem. q.e.d.

#93: ---------------------------------------