#1: Kugeln, Grunddefinition

#2: --------------------------------------

#3: Es gibt zwei gebräuchliche Kugeldefinitionen, eine geodätische und eine geometrische.

#4: In der geodätischen Definition wird ein Kugelpunkt in Abhängigkeit von Länge λ und Breite β definiert:

#5: $KPgeo(\beta, \lambda) := [SIN(\lambda)\cdot COS(\beta), SIN(\lambda)\cdot SIN(\beta), COS(\lambda)]$

#6: Wie man darauf kommt, wird in einem anderen Papier erklärt.

#7: Diese Definition benutzt man vor allem für Vermessungen auf der Kugel und zur Bestimmung von Kurven auf Kugeln.

#8: Die geodätische Definition eigenet sich gut zum Zeichnen mit CAS.

#9: -------------

#10: In der geometrischen Defintion ist die Kugel der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Mittelpunkt den gleichen Abstand r haben:

#11: $vp := [x, y, z]$

#12: $mp := [mx, my, mz]$

#13: $|vp - mp| = r$

#14: Diese Definition benutzt man vor allem für die Berechnung von Schnitten von Kugeln mit Geraden, Flächen und Kugeln.

#15: Diese Definition eigenet sich gut zum Rechnen, aber nicht zum Zeichnen mit CAS.

#16: -------------

#17: Rechne ich die Definition in #13 aus, so ergibt sich:

#18: $|vp - mp| = r$

#19: $|[x, y, z] - [mx, my, mz]| = r$

#20: $|[x - mx, y - my, z - mz]| = r$

#21: $\sqrt{x^2 - 2\cdot mx\cdot x + y^2 - 2\cdot my\cdot y + z^2 - 2\cdot mz\cdot z + mx^2 + my^2 + mz^2} = r$

#22: Etwas einfacher ist die Form, wenn ich beide Seiten quadriere:

#23: $x^2 - 2\cdot mx\cdot x + y^2 - 2\cdot my\cdot y + z^2 - 2\cdot mz\cdot z + mx^2 + my^2 + mz^2 = r^2$

#24: -------------

#25: Wenn der Mittelpunkt im Ursprung liegt, ergibt sich:

#26: $|[x, y, z] - [0, 0, 0]| = r$

#27: $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = r$

#28: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

#29: -------------

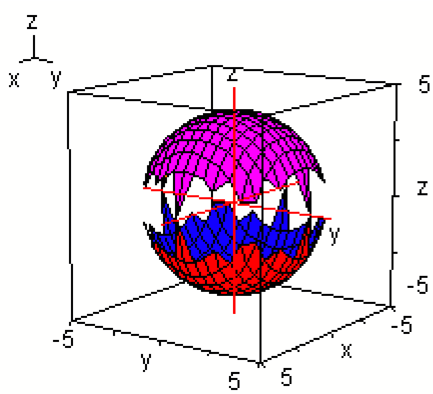
#30: Beispiele zum Zeichnen:

#31: $|[x, y, z]| = 4$

#32: In dieser Form zeichnet Derive die Kugel nicht, man muss erst nach z auflösen:

#33: SOLVE($|[x, y, z]| = 4$, z, Real)

#34: $z = -\sqrt{(-x^2 - y^2 + 16)} \vee z = \sqrt{(-x^2 - y^2 + 16)}$



#35: Man sieht, dass die Randpunkte fehlen, wenn man z plotten lässt und Derive x und y selbst auswählt.

#36: Das liegt daran, dass ein gleichmäßiges [x,y]-Raster zugrunde gelegt wird.

#37: Am Rand müsste das Raster aber immer feiner werden, wenn die Kugel voll dargestellt werden soll.

#38: -------------

#39: Man kann die Darstellung etwas verbessern, wenn man das Raster selbst definiert.

#40: Untere und obere Kugelpunkte in Abhängigkeit von x und y:

#41: $KP\_u(x, y) := \left[x, y, -\sqrt{(-x^2 - y^2 + 16)}\right]$

#42: $KP\_o(x, y) := \left[x, y, \sqrt{(-x^2 - y^2 + 16)}\right]$

#43: Laufbereich von y durch Kreispunkte in Abhängigkeit von x eingeschränkt:

#44: $yl(x) := -\sqrt{(16 - x^2)}$

#45: $yr(x) := \sqrt{(16 - x^2)}$

#46: Ich lasse y in Abhängikeit von x laufen, x noch nicht festgelegt:

#47: KPu_y_(x) := VECTOR(KP_u(x, y), y, yl(x), yr(x), 0.1)

#48: KPo_y_(x) := VECTOR(KP_o(x, y), y, yl(x), yr(x), 0.1)

#49: Ich lasse jetzt x von -4 bis 4 laufen:

#50: Plot_u := VECTOR(KPu_y_(x), x, -4, 4, 0.2)

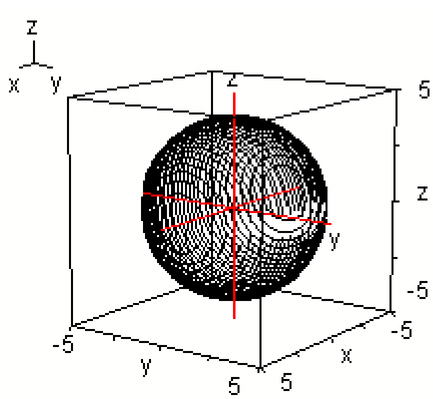
#51: Plot_o := VECTOR(KPo_y_(x), x, -4, 4, 0.2)

#52: -------------

#53: Zum Zeichnen Plot_o und Plot_u in 3D zeichnen lassen:

#54: Plot_o

#55: Plot_u



#56: Auch dieses Ergebnis lässt am Rand noch Lücken erkennen.

#57: Grund: Mit der Schrittweite 0.1 verfehlt man evtl. den letzten
Punkt im Kreis.

#58: Abhilfe: Zum Zeichnen die geodätische Version benutzen.

#59: -------------