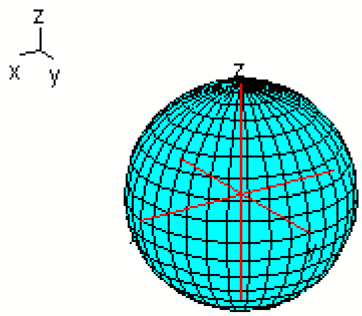
#1: Kugeln: Herleitung der geodätischen Kugelformel

#2: --------------------------------------

#3: Eine Kugel kann man so zeichnen wie einen Globus: mit Breiten- und Längenkreisen.




#4: Ein Breitenkreis ist ein Parallelkreis zum Äquator.

#5: Die Breitenkreise werden nach Norden und Süden, vom Äquator ausgehend immer kleiner.

#6: Berlin liegt z.B. auf 52° nördlicher Breite.

#7: D.h., dass man vom Äquator um 52° höher nach Norden gehen muss, um auf der Höhe von Berlin zu sein.

#8: Längenkreis = Großkreis durch die Pole = Meridian = Mittagskreis (alle darauf haben zur gleichen Zeit 12.00 Uhr)

#9: Die Längenkreise haben immer den gleichen Radius, den der Kugel.

#10: Berlin liegt auf 13° östlicher Länge.

#11: D.h., dass man vom Längengrad null (durch Greenwich) um 13° nach Osten gehen muss.

#12: Kugelpunkte sind die Schnittpunkte von Längen- und Breitenkreisen.

#13: Ein Kugelpunkt ist deshalb mathematisch durch Länge, Breite und Radius des Punktes fesgelegt.

#14: Die Kugel erkennt man, wenn Längen- und Breitenkreise gezeichnet sind, wie oben.

#15: Man kann eine Kugel aber auch schon erkennen, wenn man nur Längen-oder nur Breitenkreise zeichnet.

#16: Wir suchen also eine Funktionsgleichung der folgenden Art:

#17: Kugelpunkt(Länge, Breite,Radius):= [x,y,z]

#18: Dabei hängt jede der Komponenten x, y und z natürlich von Länge, Breite und Radius ab.

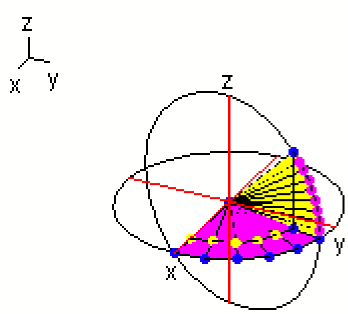
#19: Gesucht ist also genauer eine Funktion [x(l,b,r), y(l,b,r), z(l,b,r)].

#20: Um die Lage der Kugel im Raum kümmern wir uns vorerst nicht; die Kugel liege im Ursprung.

#21: Wenn sie woanders liegen soll, dann addiert man einfach die Koordinaten des neuen Mittelpunkts dazu.

#22: ------------------------------------

#23: Vergrößern Sie die folgende Zeichnung durch Doppelklick und teilen Sie das Fenster vertikal.




#24: ------------------------------------

#25: Ein Kugelpunkt ensteht, wenn man einen Punkt zunächst auf dem Äquator bewegt und ihn dann hoch Richtung Nordpol oder herunter in Richtung Südpol dreht.

#26: Ich habe hier den Punkt [5,0,0] um 75° nach Osten gedreht (rosa) und ihn dann um 45° nach Norden hoch gedreht (gelb).

#27: Der Kugelpunkt ist der blaue rechts oben.

#28: Diese Kugelpunkt hat die Länge 75° Ost und die Breite 45° Nord.

#29: Welche x-y-z-Koordinaten hat er?

#30: -----------------------------------

#31: Ich bestimme zunächst die z-Koordinate.

#32: Dazu fälle ich das Lot vom Kugelpunkt auf die Grundebene (senkrechte Linie).

#33: Ich betrachte das Dreieck Ursprung-Lotfusspunkt-Kugelpunkt.

#34: Das Dreieck ist beim Lotfusspunkt rechtwinklig, also kann ich sin, cos usw. anwenden.

#35: Es sei h die Höhe des Kugelpunktes über der Grundebene. Der Radius der Kugel sei 5.

#36: Weil ich den Kugelpunkt um 45° hochgedreht habe, muss im betrachteten Dreieck für die Höhe h gelten:

#37: $\mathrm{SIN}(45°) = \frac{h}{5}$

#38: $h = 5 \cdot \mathrm{SIN}(45°)$

#39: Die Höhe h ist aber nichts anderes als die z-Komponente des Kugelpunktes. Also haben wir für den Kugelpunkt:

#40: $[x, y, 5 \cdot \mathrm{SIN}(45°)]$

#41: D.h.: z ist Radius mal Sinus von der Breite.

#42: D.h.: Die z-Komponente ist die Höhe über der Äquatorebene.

#43: -----------------------------------

#44: Nun müssen wir noch x und y bestimmen.

#45: Das Lot des Kugelpunktes auf die Grundebene hat einen Fußpunkt.

#46: Der Abstand dieses Fußpunktes vom Ursprung ist aus dem betrachteten Dreieck leicht zu bestimmen:

#47: cos(45°)=Abstand/5

#48: Abstand=cos(45°)*5

#49: -----------------------------------

#50: Wir brauchen jedoch eigentlich nicht den Abstand, sondern die x-y-Werte des Lotfußpunktes.

#51: Den Lotfußpunkt liegt auf einem Kreis in der Grundebene.

#52: Der Radius des Kreises ist der Abstand des Lotfußpunktes vom Ursprung, also 5*cos(45°) und der Drehwinkel ist 75°, also der Längengrad.

#53: Ein Kreis in der x-y-Ebene ist gegeben durch:

#54: $[r \cdot COS(t), r \cdot SIN(t), 0]$

#55: Der Radius r des Lotfusspunktkreises ist der Abstand vom Ursprung, also 5*cos(45°):

#56: $[5 \cdot COS(45°) \cdot COS(t), 5 \cdot COS(45°) \cdot SIN(t), 0]$

#57: Der Drehwinkel des Lotfusspunktes war der Längengrad des Kugelpunktes, also 75°.

#58: Damit haben wir die Koordinaten des Lotfusspunktes:

#59: $[5 \cdot COS(45°) \cdot COS(75°), 5 \cdot COS(45°) \cdot SIN(75°), 0]$

#60: Die z-Koordinate des Kugelpunktes war 5*sin(45°). Das setzen wir ein:

#61: $[5 \cdot COS(45°) \cdot COS(75°), 5 \cdot COS(45°) \cdot SIN(75°), 5 \cdot SIN(45°)]$

#62: Das sind die Koordinaten des Kugelpunktes mit der Länge 75° und der Breite 45° auf einer Kugel mit Radius 5.

#63: -------------------------------------

#64: Für beliebige Radien r, Längen l und Breiten b ergibt sich also:

#65: $kugelpunkt(r, l, b) := [r \cdot COS(b) \cdot COS(l), r \cdot COS(b) \cdot SIN(l), r \cdot SIN(b)]$

#66: Da der Radius in jeder Komponente auftaucht, kann man ihn herausziehen:

#67: $kugelpunkt(r, l, b) := r \cdot [COS(b) \cdot COS(l), COS(b) \cdot SIN(l), SIN(b)]$

#68: -------------------------------------

#69: -------------------------------------

#70: Beispiele für Kugelpunkte:

#71: Vorherige Zeichnung löschen und dann zeichnen lassen:

#72: ÄquatorNullNull := kugelpunkt(5, 0°, 0°)

#73: Äquator_90_Ost := kugelpunkt(5, 90°, 0°)

#74: Äquator_90_West := kugelpunkt(5, - 90°, 0°)

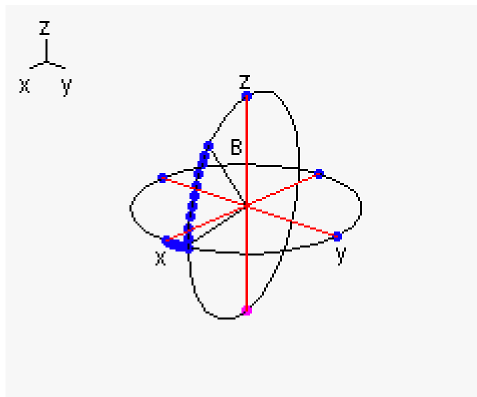
#75: Äquator_180_Ost := kugelpunkt(5, 180°, 0°)

#76: Nordpol := kugelpunkt(5, 0°, 90°)

#77: Südpol := kugelpunkt(5, 0°, - 90°)

#78: ----------------------------------------

#79: Berlin_13_Ost_52_Nord := kugelpunkt(5, 13°, 52°)

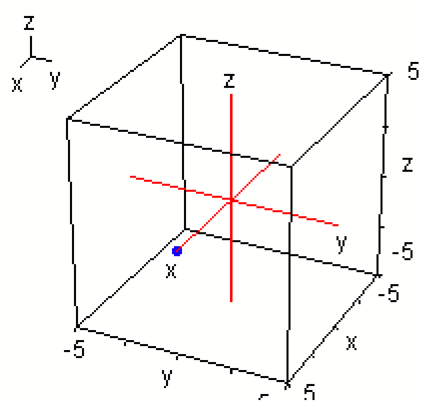



#80: ----------------------------------------

#81: Anmerkung:

#82: Ich bin bei meiner Kugeldefinition von der üblichen Beschreibung der Koordinaten der Erdkugel ausgegangen:

#83: kugelpunkt(r, l, b) := r·[COS(b)·COS(l), COS(b)·SIN(l), SIN(b)]




#84: Dabei liegt der Startpunkt auf dem Äquator bei Länge=0 und Breite=0, also bei [r,0,0].

#85: Die Länge läuft gegen den Uhrzeigersinn von 0 bis 360° oder 0 bis

$2\pi$.

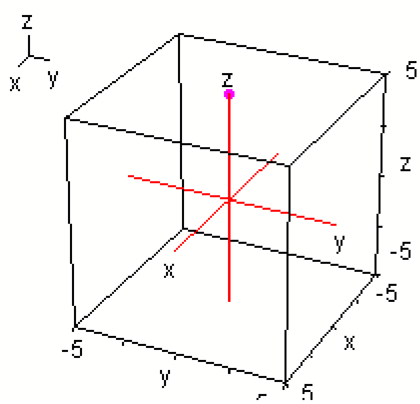
#86: Die Breite läuft von –90 bis 90° oder $-\pi/2$ bis $\pi/2$.

#87: -------------------------------------

#88: Aber in einer Formelsammlung wird man eventuell die folgende Formel finden:

#89: kupu(r, b, l) ≔ r·[SIN(b)·COS(l), SIN(b)·SIN(l), COS(l)]

#90: Dabei liegt der Startpunkt der Betrachtung im Nordpol auf der z-Achse! Bei Länge=0 und Breite=0 ergibt sich also [0,0,r].




#91: Die Länge heißt dann Azimutwinkel und läuft auch gegen den Uhrzeigersinn von 0 bis 360° bzw. 0 bis $2\pi$.

#92: Die Breite heißt aber nicht mehr Breite, sondern Polarwinkel und läuft von 0 bis 180° oder 0 bis $\pi$ von der z-Achse Richtung Süden.

#93: -------------------------------------

#94: Ich bleibe bei meiner Definition, weil Sie anschaulicher ist und weil man damit praktische Aufgaben, welche Koordinaten von Punkten auf der Erde verwenden, leichter lösen kann.

#95: -------------------------------------