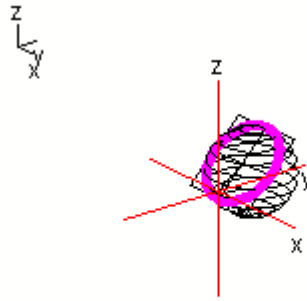


#1: Schnitt von Kugel und Ebene



#2: -----

#3: Kugel gegeben mit $MP=[1,1,1]$ und Radius 2 :

#4: $va := [1, 1, 1]$

#5: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2^2$

#6: ----- Ebenengleichung -----

#7: $vb := [1, 1, 2]$

#8: $vri1n := [1, 0, 0]$

#9: $vri2n := \left[0, \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)}, \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} \right]$

#10: $ebene(s, t) := vb + s \cdot vri1n + t \cdot vri2n$

#11: -----

#12: Gesucht: Schnittkreis von Kugel und Ebene!

#13: -----

#14: Lösung:

#15: ----- Prüfung der Richtungsvektoren -----

#16: $|vri1n| = 1$

#17: $|vri2n| = 1$

#18: $vri1n \cdot vri2n = 0$

#19: Die Richtungsvektoren der Ebene sind normiert und rechtwinklig!

#20: (Das braucht man zur Darstellung des Schnittkreises, wie man unten sehen wird.)

#21: ----- Normalenvektor der Ebene -----

#22: Normalenvektor $[x,y,z]$ wird mit Kreuzprodukt bestimmt:

$$\#23: \text{CROSS}(vri1n, vri2n) = \left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\#24: \text{normale} := \left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

#25: -----

#26: Weist die Normale zur Ebene hin?

$$\#27: \text{ebene}(s, t) = \lambda \cdot \text{normale}$$

$$\#28: \text{SOLVE}(\text{ebene}(s, t) = \lambda \cdot \text{normale}, [\lambda, s, t])$$

$$\#29: \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge s = -1 \wedge t = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

#30: λ ist positiv, als weist die Normale zur Ebene hin.

#31: -----

#32: Ich normiere die Normale:

$$\#33: \text{enormale} := \frac{\text{normale}}{|\text{normale}|}$$

$$\#34: \left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

#35: -----

#36: ----- Schneidet die Ebene überhaupt die Kugel? -----

#37: Das ist der Fall, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene kleiner als der Radius der Kugel ist.

#38: Die Verlängerung der Normalen muss vom Kugelmittelpunkt aus die Ebene treffen:

#39: Der Kugelmittelpunkt war $[1,1,1]$:

$$\#40: [1, 1, 1] + \lambda \cdot \text{enormale} = \text{ebene}(s, t)$$

$$\#41: 1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{2} + 1 \wedge \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{2} + 2 \wedge 1 = s + 1$$

#42: SOLVE $\left(1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{2} + 1 \wedge \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{2} + 2 \wedge 1 = s + 1, [\lambda, s, t] \right)$

#43: $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge s = 0 \wedge t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

#44: Weil enormale normiert war, gibt λ den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Ebene an.

#45: Der Abstand des Kugelmittelpunkts von der Ebene ist $\sqrt{2}/2$. Das ist kleiner als 2. Also Schnitt!

#46: -----

#47: Zugleich ist mit s und t auch der Mittelpunkt des Schnittkreises bestimmt!

#48: Denn die Normale steht senkrecht auf der Ebene und der Schnittkreis liegt in der Ebene.

#49: Die Normale steht also auch senkrecht auf dem Schnittkreis.

#50: -----

#51: Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist also durch Einsetzen von s und t in die Ebenengleichung zu bestimmen

#52: oder durch Einsetzen von λ in die Formel $[1, 1, 1] + \lambda \cdot \text{enormale!}$

#53: ebene $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

#54: MiPuSchniKrs := $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

#55: -----

#56: ----- Bestimmung des Radius des Schnittkreises -----

#57: Die Verlängerung eines Richtungsvektors der Ebene vom MiPuSchniKrs aus muss die Kugelgleichung erfüllen.

#58: $\text{MiPuSchniKrs} + t \cdot \text{vri1n}$

#59: $\left[t + 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

#60: Ich setze diese Koordinaten in die Kugelgleichung für x, y und z ein:

#61: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$

#62: $(t + 1 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = 2$

#63: $\text{SOLVE}\left(\left(t + 1 - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = 2^2, t\right)$

#64: $t = -\frac{\sqrt{14}}{2} \vee t = \frac{\sqrt{14}}{2}$

#65: Der Wert von t gibt den Schnittkreisradius an, weil vri1n normiert ist.

#66: $\text{SchniKrsRad} := \frac{\sqrt{14}}{2}$

#67: 1.870828693

#68: -----

#69: Den Schnittkreis können wir jetzt mit den Richtungsvektoren der Ebene bauen.

#70: Die Richtungsvektoren der Ebene sind normiert sind stehen senkrecht aufeinander.

#71: Deshalb beschreibt der folgende Ausdruck einen Kreis im Ursprung parallel zur Ebene:

#72: $\text{COS}(t) \cdot \text{vri1n} + \text{SIN}(t) \cdot \text{vri2n}$

#73: Diesen Kreis vergrößern/verkleinern wir mit dem SchniKrsRad:

#74: $\text{SchniKrsRad} \cdot (\text{COS}(t) \cdot \text{vri1n} + \text{SIN}(t) \cdot \text{vri2n})$

#75: Nun verschieben wir ihn zum MiPuSchniKrs:

#76: $\text{Schnittkreispt}(t) := \text{MiPuSchniKrs} + \text{SchniKrsRad} \cdot (\text{COS}(t) \cdot \text{vri1n} +$

SIN(t)·vri2n)

#77:
$$\left[\frac{\sqrt{14} \cdot \cos(t)}{2} + 1, \frac{\sqrt{7} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7} \cdot \sin(t)}{2} + \frac{3}{2} \right]$$

#78: Das ist die Gleichung des gesuchten Schnittkreises!

#79: -----

#80: Vorbereitungen zur Zeichnung:

#81: Ebene im MiPuSchniKrs anfangen lassen:

#82: $\text{eschni}(s, t) := \text{MiPuSchniKrs} + s \cdot \text{vri1n} + t \cdot \text{vri2n}$

#83: $\text{ekreuz}(s) := [[0, 0, 0], \text{eschni}(0, 0), \text{eschni}(s, 0), \text{eschni}(-s, 0),$
 $\text{eschni}(0, 0), \text{eschni}(0, s), \text{eschni}(0, -s)]$

#84: $\text{equadrat}(s) := [\text{eschni}(s, s), \text{eschni}(-s, s), \text{eschni}(-s, -s),$
 $\text{eschni}(s, -s), \text{eschni}(s, s)]$

#85: Schnittkreis := VECTOR $\left([\text{Schnittkreispkt}(t)], t, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{36} \right)$

#86: -----

#87: Kugelzeichnung

#88: λ ist die geographische Länge, ϕ die Breite.

#89: $\text{Kugelpunkt}(\lambda, \phi) := \text{va} + 2 \cdot [\cos(\phi) \cdot \cos(\lambda), \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda), \sin(\phi)]$

#90: BKreis(ϕ) := VECTOR $\left(\text{Kugelpunkt}(\lambda, \phi), \lambda, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$

#91: LKreis(λ) := VECTOR $\left(\text{Kugelpunkt}(\lambda, \phi), \phi, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$

#92: KugelLkreise := VECTOR $\left([\text{LKreis}(\lambda)], \lambda, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$

#93: KugelBkreise := VECTOR $\left([\text{BKreis}(\phi)], \phi, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$

#94: Kugelvoll := VECTOR $\left(\text{BKreis}(\phi), \phi, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$

#95: -----

#96: -----

#97: Nacheinander zeichnen lassen:

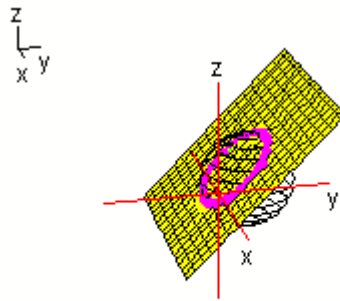
#98: `ekreuz(SchniKrsRad)`

#99: `equadrat(SchniKrsRad)`

#100: Schnittkreis

#101: KugelBkreise

#102: `ebene(s, t)`



#103: -----

#104: -----

#105: Aufgabe:

#106: Nehmen Sie die gleiche Kugel und bestimmen Sie den Schnittkreis mit der folgenden Ebene:

#107: `vbneu := [2, 1, 2]`

#108: `vri1neu := [$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]`

#109: `vri2neu := [0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$]`

#110: `ebeneneu(s, t) := vbneu + s*vri1neu + t*vri2neu`

#111: -----