

#1: Parallele zu Kurven in 2D

#2: -----

#3: Kurven in 2D entstehen, wenn man die Komponenten x und y als Funktionen von t definiert.

#4: Die allgemeine Form ist also:

#5: $k2d(t) := [fx(t), fy(t)]$

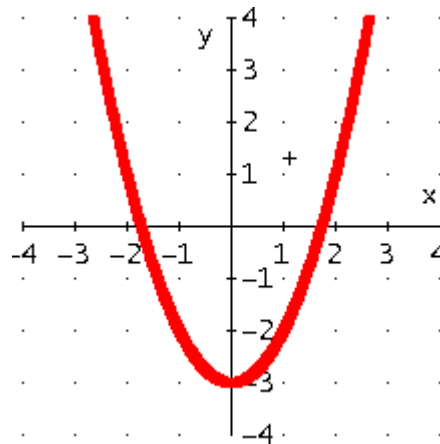
#6: Gesucht ist die Parallele zu einer Parabel!

#7: -----

#8: Beispiel: Parabel in der 2D-Ebene, stehend:

#9: $para(t) := [t, t^2 - 3]$

#10: VECTOR([para(t)], t, -4, 4, 0.01)



#11: -----

#12: Die Ableitung von para(t) ergibt den allgemeinen Tangentialvektor, den Richtungsvektor der Tangente:

#13: $paraAb1(t) := \frac{d}{dt} para(t)$

#14: $paraAb1(t) = [1, 2 \cdot t]$

#15: Die Tangente entsteht aus Kurvenpunkt plus λ mal Tangentialvektor:

#16: $Tpara(t, \lambda) := para(t) + \lambda \cdot paraAb1(t)$

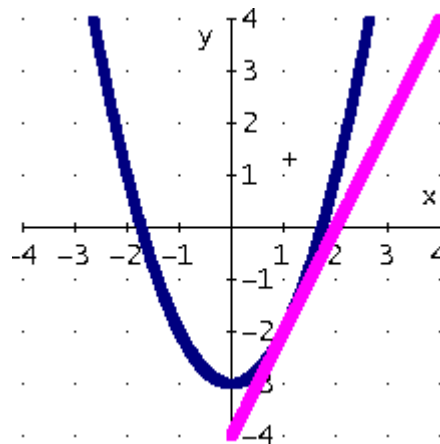
#17: Die Tangente bei $t=1$ ist z.B.:

#18: $Tpara(1, \lambda) = [\lambda + 1, 2 \cdot \lambda - 2]$

#19: Zeichnung:

#20: VECTOR(para(t), t, -4, 4, 0.01)

#21: VECTOR(Tpara(1, λ), λ, -4, 4, 0.01)



#22: -----

#23: Der zum Tangentialvektor senkrechte Vektor heißt Normalenvektor.

#24: In 2D kann man den senkrechten Vektor zu einem Vektor durch
Vertauschen von x und y und negieren von y erhalten:

#25: paraAbl(t) = [1, 2·t]

#26: Npara(t) := [2·t, -1]

#27: Normaleneinheitsvektor:

#28: NEpara(t) := $\frac{Npara(t)}{|Npara(t)|}$

#29:
$$NEpara(t) = \left[\frac{2 \cdot t}{\sqrt{(4 \cdot t^2 + 1)}}, -\frac{1}{\sqrt{(4 \cdot t^2 + 1)}} \right]$$

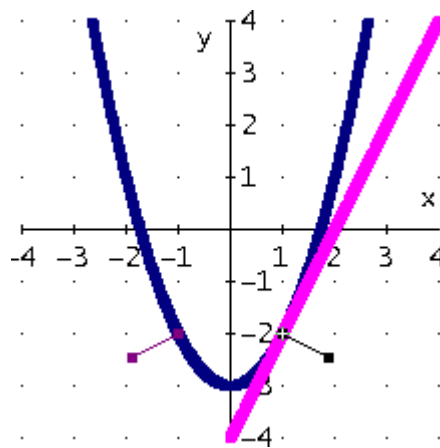
#30: Die Normale als Gerade entsteht aus Kurvenpunkt plus μ mal
Normaleneinheitsvektor:

#31: NormPara(t, μ) := para(t) + μ·NEpara(t)

#32: Wir lassen zum Test einige Normalen zeichnen, um zu kontrollieren,
ob die Normale immer nach außen zeigt.

#33: [para(1), NormPara(1, 1)]

#34: [para(-1), NormPara(-1, 1)]



#35: Ja, die Normalen zeigen nach außen. Hätte ich in #26 den x-Wert negiert, würde sie abwechselnd nach innen und außen zeigen.

#36: -----

#37: Die Parallele zur Parabel ist jetzt einfach zu definieren:

#38: Sie entsteht aus der Normalen $\text{NormPara}(t, \mu)$, wenn ich μ festhalte und t laufen lasse:

#39: $\text{NormPara}(t, \mu) := \text{para}(t) + \mu \cdot \text{NEpara}(t)$

#40: $\text{Parallele}(t, d) := \text{para}(t) + d \cdot \text{NEpara}(t)$

#41: -----

#42: Zeichnung: Parallelen außen:

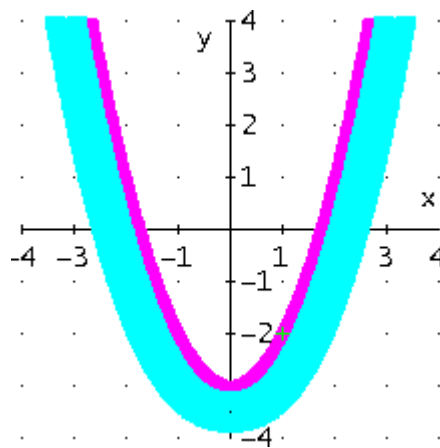
#43: $\text{VECTOR}(\text{para}(t), t, -4, 4, 0.01)$

#44: $\text{VECTOR}(\text{Parallele}(t, 0.2), t, -4, 4, 0.01)$

#45: $\text{VECTOR}(\text{Parallele}(t, 0.4), t, -4, 4, 0.01)$

#46: $\text{VECTOR}(\text{Parallele}(t, 0.6), t, -4, 4, 0.01)$

#47: $\text{VECTOR}(\text{Parallele}(t, 0.8), t, -4, 4, 0.01)$



#48: -----

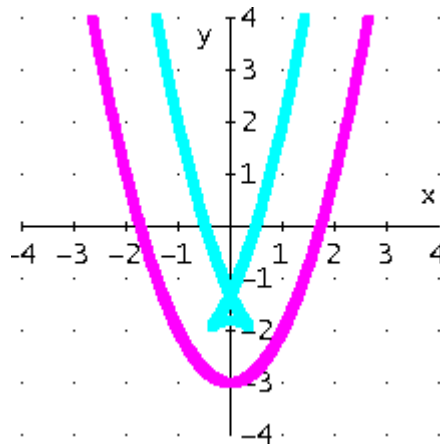
#49: Zeichnung: Parallelen innen:

#50: VECTOR(para(t), t, -4, 4, 0.01)

#51: VECTOR(Parallelele(t, -0.4), t, -4, 4, 0.01)

#52: VECTOR(Parallelele(t, -0.8), t, -4, 4, 0.01)

#53: VECTOR(Parallelele(t, -1.2), t, -4, 4, 0.01)



#54: -----

#55: Warum ist die Parallele im Allgemeinen keine Parabel?

#56: Wäre z.B. die Kurve 'Parallelele(1, 1)' eine Parabel, müsste sie wegen der Normallage die folgende Form haben:

#57: $f(x) = k \cdot x^2 - 4$

#58: Wert -4, weil die Parallele bei $x=0$ durch $y=-4$ geht.

#59: Wir betrachten die Parallelele(1,1):

$$\left[2 \cdot \sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad 1 \right]$$

#60:
$$\text{Parallele}(1, 1) = \left[\frac{\quad}{5} + 1, -\frac{\quad}{5} - 2 \right]$$

#61: Ist der y-Wert aus $k \cdot x^2 - 4$ entstanden? Berechnung:

#62:
$$k \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} + 1 \right)^2 - 4 = -\frac{\sqrt{5}}{5} - 2$$

#63:
$$\text{SOLVE} \left(k \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} + 1 \right)^2 - 4 = -\frac{\sqrt{5}}{5} - 2, k, \text{Real} \right)$$

#64:
$$k = 110 - 49 \cdot \sqrt{5}$$

#65:
$$k = 0.4326691025$$

#66: Wenn der y-Wert aus $k \cdot x^2 - 4$ entstanden ist, müsste k der obige Wert sein.

#67: Wir betrachten einen zweiten Punkt mit $t=2$: $\text{Parallele}(2,1)$

#68:
$$\text{Parallele}(2, 1) = \left[\frac{4 \cdot \sqrt{17}}{17} + 2, 1 - \frac{\sqrt{17}}{17} \right]$$

#69: Ist der y-Wert aus $k \cdot x^2 - 4$ entstanden? Berechnung:

#70:
$$k \cdot \left(\frac{4 \cdot \sqrt{17}}{17} + 2 \right)^2 - 4 = 1 - \frac{\sqrt{17}}{17}$$

#71:
$$\text{SOLVE} \left(k \cdot \left(\frac{4 \cdot \sqrt{17}}{17} + 2 \right)^2 - 4 = 1 - \frac{\sqrt{17}}{17}, k, \text{Real} \right)$$

#72:
$$k = \frac{1853}{676} - \frac{361 \cdot \sqrt{17}}{676}$$

#73:
$$k = 0.5392882679$$

#74: Wenn der y-Wert aus $k \cdot x^2 - 4$ entstanden ist, müsste k der obige Wert sein. Dieses k hat aber einen ganz anderen Wert als das oben zuerst berechnete k.

#75: Also hat die Parallel für den Abstand 1 nicht die Form $f(x) = k \cdot x^2 - 4$! q.e.d.

#76: -----

#77: -----

#78: Hintergrund:

#79: Eine Parabel, die als Funktion von x darstellbar ist, muss die folgende Form haben:

$$\#80: \left[t, a \cdot t^2 + b \cdot t + c \right]$$

#81: Die Parallele hat aber die Form:

$$\#82: \left[\frac{2 \cdot d \cdot t}{\sqrt{(4 \cdot t^2 + 1)}} + t, - \frac{d}{\sqrt{(4 \cdot t^2 + 1)}} + t^2 - 3 \right]$$

#83: Diese Form kann man nicht in die Form von #80 umwandeln.

#84: -----