#1: Anleitung: Kugel durch vier Punkte legen (Lösung mit GLS)

#2: ----------------------------

#3: Gesucht ist eine Kugel durch die folgenden vier Punkte.

#4: $vA := \left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, 1\right]$

#5: $vB := \left[1 - \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, 1\right]$

#6: $vC := [1, 1, 4]$

#7: $vD := [1, -2, 1]$

#8: ----------------------------

#9: Lösung:

#10: Wenn [a,b,c] der Mittelpunkte der Kugel ist, muss für die

Kugelpunkte [x,y,z] gelten:

#11: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

Wenn ich die vier Kugelpunkte einsetze,
dann erhalte ich vier Gleichungen mit vier Unbekannten.
Die Gleichungen sind aber quadratische Gleichungen!
Die werden nicht auf Knopfdruck gelost.
Man kann sie mit dem Einsetzverfahren lösen,
das ist aber mühsam und gibt Riesenterme.
Besser ist der folgende "Trick":
Man macht die vier quadratischen Gleichungen
durch vorübergehende Umbenennung linear!
Das lässt sich leicht lösen.
Und im Nachhinein rechnet man die Ergebnisse um.

#12: ----------------------------

#13: Ich rechne die Grundgleichung aus:

#14: $x^2 - 2\cdot a\cdot x + y^2 - 2\cdot b\cdot y + z^2 - 2\cdot c\cdot z + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$

#15: x,y und z sind die Kompenten der gegebenen Punkte; a, b und c

suche ich.

#16: Alles, was gesucht ist, schreibe ich nach links, sicher gegebene

Werte nach rechts:

#17: $- 2\cdot a\cdot x - 2\cdot b\cdot y - 2\cdot c\cdot z + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = - x^2 - y^2 - z^2$

#18: Nun benenne ich die unbekannten Terme temporär um. Aber nicht definieren, nur merken, aufschreiben!

#19: Ich merke mir: ka = − 2·a ; kb = − 2·b ; kc = − 2·c ; kd = a^2 + b^2 + c^2 − r^2

#20: ----------------------------

#21: Damit Derive ka, kb usw. als Variable akzeptiert, definiere ich sie leer:

#22: $ka :=$

#23: $kb :=$

#24: $kc :=$

#25: $kd :=$

#26: ----------------------------

#27: Jetzt kann ich die Gleichung aus #17 neu schreiben:

#28: $ka \cdot x + kb \cdot y + kc \cdot z + kd = - x^2 - y^2 - z^2$

#29: Das ist offensichtlich eine lineare Gleichung.

#30: Die Unbekannten sind ka bis kd. Die Bekannten sind x,y und z.

#31: ----------------------------

#32: Nun setze ich die Koordinaten x, y und z der vier Punkte in die Gleichung ein.

#33: Achtung! Nicht Werte kopieren, sondern vA↓1 usw. für die Komponenten ausnutzen!

#34: $ka \cdot vA_1 + kb \cdot vA_2 + kc \cdot vA_3 + kd = - vA_1^2 - vA_2^2 - vA_3^2$

#35: $ka \cdot vB_1 + kb \cdot vB_2 + kc \cdot vB_3 + kd = - vB_1^2 - vB_2^2 - vB_3^2$

#36: $ka \cdot vC_1 + kb \cdot vC_2 + kc \cdot vC_3 + kd = - vC_1^2 - vC_2^2 - vC_3^2$

#37: $ka \cdot vD + kb \cdot vD + kc \cdot vD + kd = - vD^2 - vD^2 - vD^2$

1 2 3 1 2 3

#38: ----------------------------

#39: Das sind vier lineare Gleichungen mit vier Unbekannten. Das lasse ich lösen:

#40: $$\mathrm{SOLVE}\left(ka\cdot vA_1 + kb\cdot vA_2 + kc\cdot vA_3 + kd = -vA_1^2 - vA_2^2 - vA_3^2 \wedge ka\cdot vB_1 + kb\cdot vB_2 + kc\cdot vB_3 + kd = -vB_1^2 - vB_2^2 - vB_3^2 \wedge ka\cdot vC_1 + kb\cdot vC_2 + kc\cdot vC_3 + kd = -vC_1^2 - vC_2^2 - vC_3^2 \wedge ka\cdot vD_1 + kb\cdot vD_2 + kc\cdot vD_3 + kd = -vD_1^2 - vD_2^2 - vD_3^2, [ka, kb, kc, kd]\right)$$

#41: $ka = -2 \wedge kb = -2 \wedge kc = -2 \wedge kd = -6$

#42: ----------------------------

#43: Jetzt folgt die Rückübersetzung von ka zu a, von kb zu b usw.:

#44: Es war ka = - 2·a, hier ka=-2, also -2=2a, also a=1.

#45: Es war kb = - 2·b, also -2=2b, also b=1.

#46: Es war kc = - 2·c, also -2=2c, also c=1.

#47: Es war kd = a^2 + b^2 + c^2 - r^2, also -6 = 3-r^2, also -9=-r^2, also r=3.

#48: ----------------------------

#49: Der Kugelmittelpunkt [a,b,c] ist [1,1,1] und der Radius r ist 3.

#50: Die Kugelgleichung ist dann:

#51: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3^2$

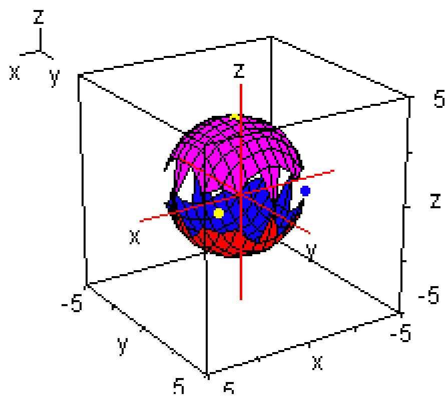
#52: Das war es!

#53: ----------------------------

#54: Primitive Zeichnung:

#55: $\mathrm{SOLVE}((x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3^2, z)$

#56: $z = 1 - \sqrt{(-x^2 + 2\cdot x - y^2 + 2\cdot y + 7)} \vee z = \sqrt{(-x^2 + 2\cdot x - y^2 + 2\cdot y + 7)} + 1$



#57: ---------------------------------