#1: Anleitung: Kugel durch vier Punkte –geometrische Lösung –

#2: ----------------------------

#3: Gegeben sind vier Punkte einer Kugel.

#4: $vA := \left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, 1\right]$

#5: $vB := \left[1 - \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 1, 1\right]$

#6: vC := [1, 1, 4]

#7: vD := [1, –2, 1]

#8: Gesucht ist eine Kugel durch diese vier Punkte.

#9: Die vier Punkte dürfen natürlich nicht alle auf einer Linie oder

einer Ebene liegen.

Wenn man den Mittelpunkt eines Kreises in der Ebene sucht, der durch drei Punkte festgelegt ist,
dann fasst man je zwei Verbindungsstrecken als Sehnen auf
und errichtet darauf Mittelsenkrechte.
Wo diese Mittelsenkrechten sich
schneiden muss der MP des Kreises sein.

Bei einer Kugel macht man Ähnliches.
Je drei Punkte der Kugel bestimmen einen Kreis auf der Kugel. Durch dessen Mittelpunkt lege ich die Normale der
Kreisebene. Das mache ich zweimal.
Wo die Normalen sich schneiden muss der Kugelmittelpunkt liegen.
Wie errrechnet man den Kreismittelpunkt?
Es ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks aus dreien der vier Punkte.

#10: Lösung zu 'Kugel durch vier Punkte' geometrisch:

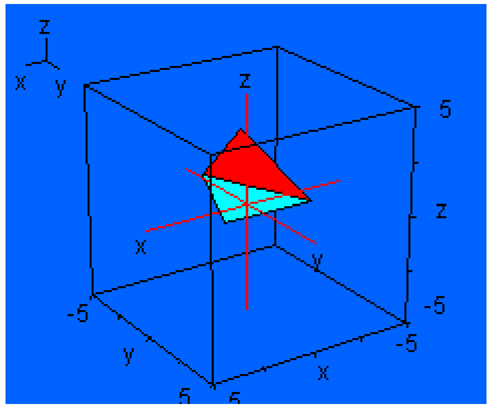
#11: 1) Ich bestimme zwei passende Dreiecke aus den vier Punkten:

#12: DreieckABD := [vA, vB, vD, vA]

#13: DreieckCBD := [vC, vB, vD, vC]

#14: POLYGON_FILL(DreieckABD)

#15: POLYGON_FILL(DreieckCBD)



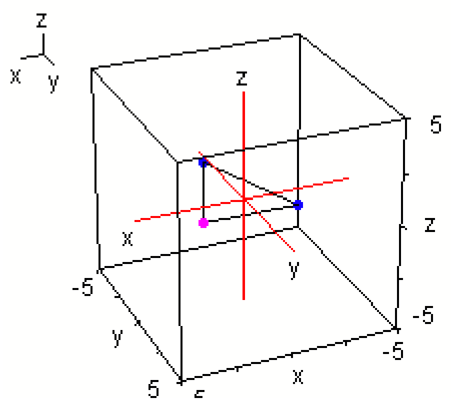
#16: ----------------------------

#17: 1a) Normale auf der Ebene des Dreiecks ABD.

#18: va sei der Stützvektor, dann sind (vb−va) und (vd−va) die Richtungsvektoren.

#19: Eine Normale auf der Ebene ABD ist dann:

#20: vnormaleABD := (vB − vA) × (vD − vA)



#21: ----------------------------

#22: 1b) Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den Seiten.

#23: Dazu bestimme ich zunächst die allgemeinen Senkrechten auf den Seiten AB und AD im Dreieck ABD:

#24: Die Normale steht senkrecht auf den beiden Seiten.

#25: Das Kreuzprodukt von Normale und Richtungsvektor der Seite steht dann senkrecht auf der Seite.

#26: vsenkrAB := vnormaleABD × (vB − vA)

#27: vsenkrAD := vnormaleABD × (vD − vA)

#28: Das geht kürzer:

#29: $vsenkrAB := (vB - vA) \times (vD - vA) \times (vB - vA)$

#30: $vsenkrAD := (vB - vA) \times (vD - vA) \times (vD - vA)$

#31: ----------------------------

#32: 1c) Wenn eine Senkrechte bestimmt ist, ist die Mittelsenkrechte:

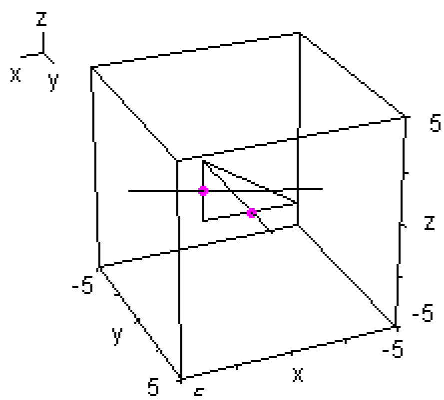
Mittelpunkt der Seite + λ mal Senkrechte:

#33: $MiPuAB := vA + \frac{1}{2}\cdot(vB - vA)$

#34: $MiPuAD := vA + \frac{1}{2}\cdot(vD - vA)$

#35: $vmittelsenkrAB(s) := MiPuAB + s\cdot vsenkrAB$

#36: $vmittelsenkrAD(t) := MiPuAD + t\cdot vsenkrAD$



#37: Das kann man in jeweils einer Formel zusammenfassen:

#38: $vmittelsenkrAB(s) := vA + \frac{1}{2}\cdot(vB - vA) + s\cdot((vB - vA) \times (vD - vA) \times (vB - vA))$

#39: $vmittelsenkrAD(t) := vA + \frac{1}{2}\cdot(vD - vA) + t\cdot((vB - vA) \times (vD - vA) \times (vD - vA))$

#40: ----------------------------

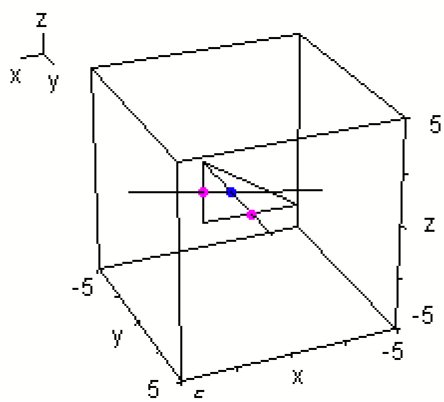
#41: 1d) Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises.

#42: vmittelsenkrAB(s) = vmittelsenkrAD(t)

#43: SOLVE(vmittelsenkrAB(s) = vmittelsenkrAD(t), [s, t])

#44: $$s = \frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{1}{18} \wedge t = \frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{6}$$

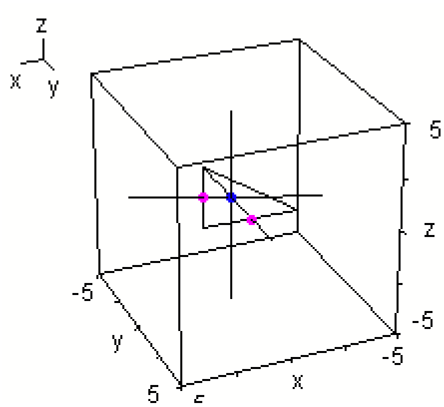
#45: MiPuUmkreisABD ≔ vmittelsenkrAB$\left(\frac{\sqrt{2}}{18} - \frac{1}{18}\right)$



#46: ----------------------------

#47: 1e) Die erste Kugelachse ist dann:

#48: KugelachseABD(ξ) ≔ MiPuUmkreisABD + ξ·vnormaleABD



#49: ----------------------------

#50: 2) Berechnungen für das DreieckCBD

#51: Die Mittelsenkrechten in CBD:

#52: Wir brauchen in den Formeln nur vA durch vC zu ersetzen, weil vB und vD gleich bleiben.

#53: $\text{vmittelsenkrCB}(s) := vC + \frac{1}{2}\cdot(vB - vC) + s\cdot((vB - vC) \times (vD - vC) \times (vB - vC))$

#54: $\text{vmittelsenkrCD}(t) := vC + \frac{1}{2}\cdot(vD - vC) + t\cdot((vB - vC) \times (vD - vC) \times (vD - vC))$

#55: Schnittpunkte der Mittelsenkrechten:

#56: $\text{vmittelsenkrCB}(s) = \text{vmittelsenkrCD}(t)$

#57: $\text{SOLVE}(\text{vmittelsenkrCB}(s) = \text{vmittelsenkrCD}(t), [s, t])$

#58: $$s = \frac{\sqrt{2}}{306} + \frac{1}{51} \wedge t = -\frac{\sqrt{2}}{306} - \frac{1}{51}$$

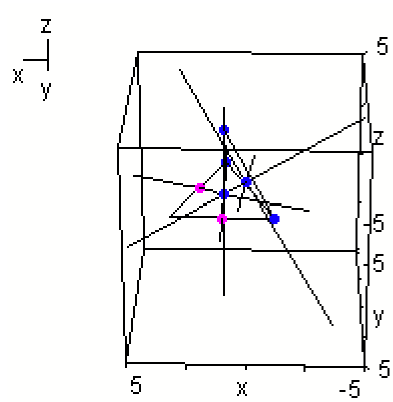
#59: $\text{vmittelsenkrCB}\left(\frac{\sqrt{2}}{306} + \frac{1}{51}\right)$

#60: $\text{MiPuUmkreisCBD} := \text{vmittelsenkrCB}\left(\frac{\sqrt{2}}{306} + \frac{1}{51}\right)$

#61: Die zweite Kugelachse:

#62: $\text{vnormaleCBD} := (vB - vC) \times (vD - vC)$

#63: $\text{KugelachseCBD}(\kappa) := \text{MiPuUmkreisCBD} + \kappa\cdot\text{vnormaleCBD}$



#64: ---------------------------

#65: 3) Wir schneiden die Kugelachsen:

#66: KugelachseABD(ξ) = KugelachseCBD(κ)

#67: SOLVE(KugelachseABD(ξ) = KugelachseCBD(κ), [κ, ξ])

#68: $$\kappa = \frac{4}{51} - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{51} \wedge \xi = 0$$

#69: $$\text{KugelachseABD}(0) = [1, 1, 1]$$

#70: $$\text{KugelachseCBD}\left(\frac{4}{51} - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{51}\right) = [1, 1, 1]$$

#71: ----------------------------

#72: Ergebnis:

#73: Kugelmittelpunkt ≔ [1, 1, 1]

#74: Kugelradius ≔ $\left|[1, 1, 1] - vA\right|$

#75: $$\text{Kugelradius} = 3$$

#76: Kugelgleichung:

#77: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3^2$

#78: ----------------------------

#79: Proben:

#80: Kugeltest(v) ≔ $(v_1 - 1)^2 + (v_2 - 1)^2 + (v_3 - 1)^2$

#81: $$\text{Kugeltest}(vA) = 9$$

#82: $$\text{Kugeltest}(vB) = 9$$

#83: $$\text{Kugeltest}(vC) = 9$$

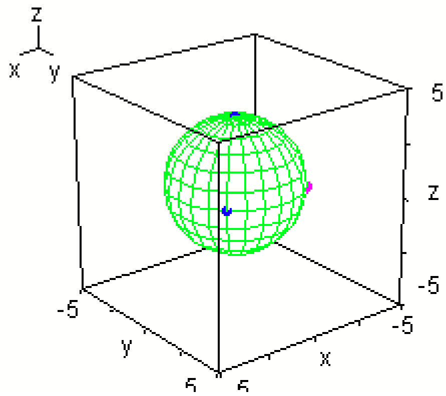
#84: $$\text{Kugeltest}(vD) = 9$$

#85: ----------------------------

#86: Zeichnung:

#87: Kugelpunkt(L, B, r) ≔ r·[COS(B)·COS(L), COS(B)·SIN(L), SIN(B)]

#88: VECTOR(VECTOR(Kugelpunkt(L, B, 3) + [1, 1, 1], B, - 90°, 90°, 15°), L, 0, 360°, 15°)



#89: ____________________________