#1: Lineare Abbildungen -Begriffsklärung-

#2: ---------------------------------

#3: Rein mathematisch ist eine lineare Funktion bzw. Abbildung eine für die gilt:

#4: 1. $f(a+b) = f(a)+f(b)$, d.h. der Funktionswert der Summe ist die Summe der Funktionswerte.

#5: 2. $f(\lambda \bullet a) = \lambda \bullet f(a)$, d.h. der Funktionswert von 'Faktor mal a' ist Faktor mal Funktionswert von a.

#6: ---------------------------------

#7: Wir kennen lineare Funktionen: z.B. $f(x):= 3*x$.

#8: Diese Funktion ordnet jeder Zahl $x \varepsilon R$ eine Zahl $y \varepsilon R$ zu, nämlich das Dreifache von x.

#9: x ---> 3x .

#10: Wenn wir x als eindimensionalen Vektor auffassen, können wir fast identisch schreiben:

#11: [x] ---> 3•[x] .

#12: Diese Funktion ordnet jedem Vektor [x] den dreifach verlängerten Vektor [3x] zu.

#13: Das kann man leicht auf Vektorräume mit zwei und mehr Dimensionen erweitern:

#14: [x,y] ---> 3•[x,y] (= [3x,3y].

#15: [x,y,z] ---> 3•[x,y,z] (= [3x,3y,3z].

#16: Bei funktionalen Zuordnungen zwischen Zahlen spricht man von 'Funktionen'.

#17: Macht man Ähnliches zwischen Vektorräumen, spricht man von 'Abbildungen'.

#18: Nun gibt es bei Abbildungen zwischen Vektorräumen, aber eine Besonderheit;

#19: man kan jede Komponente einzeln verändern:

#20: [x,y,z] ---> [3x,4y,5z].

#21: FORMAL ist eine lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen eine, die jede Komponente linear verändert, also nur mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert.

#22: [x,y,z] ---> [a•x,b•y,c•z].

#23: Nicht-linear wäre die folgende Abbilduung:

#24: [x,y,z] ---> [a•x, y^2, √z].

#25: INHALTLICH ist eine lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen eine, die Gerade in Gerade überführt und Paralleles in Paralleles.

#26: ANSCHAULICH beschreiben lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen folgende Vorgänge:

#27: -Drehung eines Objektes um Achsen oder Punkte

#28: -Streckung eines Objektes in Richtung einer oder mehrerer Achsen

#29: -Stauchung eines Objektes in Richtung einer oder mehrerer Achsen

#30: -Scherung eines Objektes in Richtung einer oder mehrerer Achsen

#31: (Streckung, Stauchung und Scherung nennt man zusammenfassend Skalierung.)

#32: -Spiegelung eines Objektes an Flächen, Geraden oder Punkten

#33: -Verschiebung eines Objektes, auch Translation genannt

#34: -(Verschiebung ist nicht genau linear, sondern nur affin)

#35: Bei all diesen Operationen bleibt die 'Liniestruktur' erhalten. Aus Linien werde Linien, aber keine Bögen.

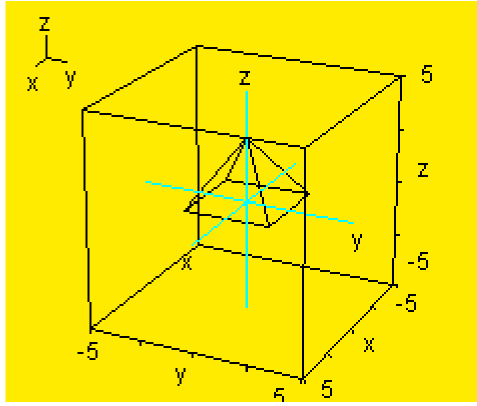
#36: ----------------------------------

#37: Ich führe zunächst Beispiele an. In den weiteren Papieren geht es um die Herleitung.

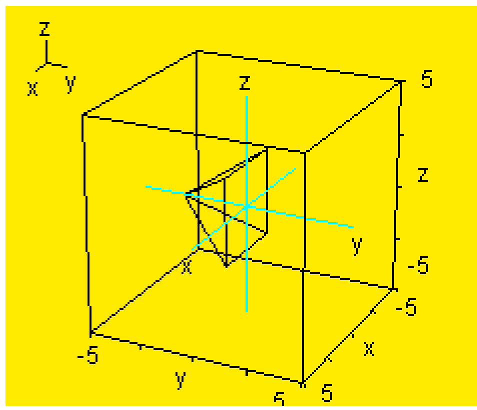
#38: ----------------------------------

#39: Beispiel: Drehung 90° um die x-Achse: [x, y, z] ----> [x, -z, y]

#40: Pyramide in Normallage:

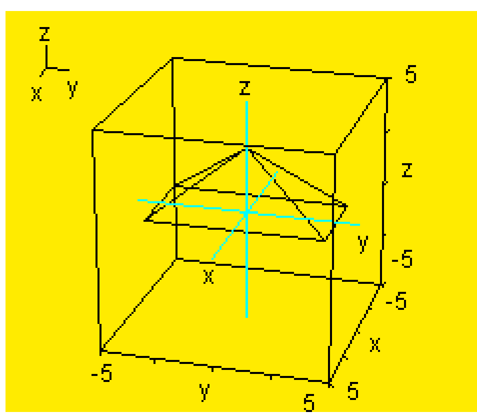


#41: Pyramide gedreht: aus jedem Eckpunkt [x,y,z] wurde [x,-z,y] gemacht.



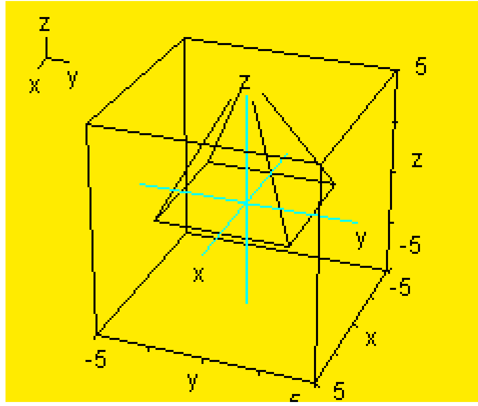
#42: ---------------------------------

#43: Pyramide gestreckt in y-Richtung: aus jedem Eckpunkt [x,y,z] wurde [x,2y,z] gemacht.



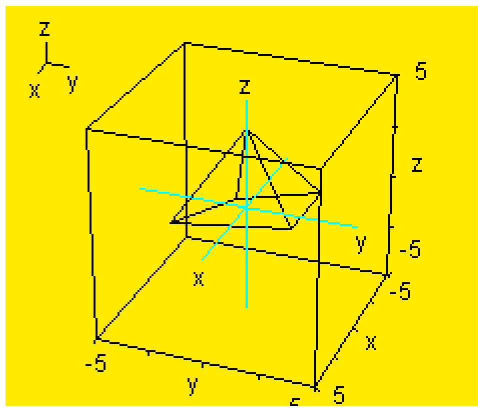
#44: ---------------------------------

#45: Pyramide gestreckt in alle Richtungen: aus jedem Eckpunkt [x,y,z] wurde [3x,3y,3z] gemacht.



#46: ----------------------------------

#47: Pyramide NICHT-linear abgebildet: Parallelen sind nicht mehr parallel.



#48: ----------------------------------