#1: Lineare Abbildungen: Drehungen

#2: Drehung eines Punktes um die x-Achse

#3: ----------------------------------

#4: $P := [x, y, z]$

#5: Wir drehen auf einem Kreis

#6: ----------------------------------

#7: Der Drehkreismittelpunkt der x-Abschnitt des Punktes:

#8: $DrehMiPux := [x, 0, 0]$

#9: ----------------------------------

#10: Der Drehradius ist der Abstand des Punktes vom Drehreismittelpunkt auf der x-Achse:

#11: $DrehRadx := |P - DrehMiPux|$

#12: $DrehRadx := |[x, y, z] - [x, 0, 0]|$

#13: $$DrehRadx := \sqrt{y^2 + z^2}$$

#14: ----------------------------------

#15: Der erste Richtungsvektor soll auf den Punkt zeigen:

#16: $$Drehxvri1ne := \frac{P - DrehMiPux}{|P - DrehMiPux|}$$

#17: $$Drehxvri1ne := \left[0, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right]$$

#18: ----------------------------------

#19: Der zweite Richtungsvektor soll auf vri1 und auf dem Mittelpunktsvektor senkrecht stehen und 'nach links' weisen, entgegen dem Urzeigersinn.

#20: Deshalb vertauschen wir die Komponenten und negieren die erste Komponente:

#21: $$Drehxvri2ne := \left[0, - \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right]$$

#22: Hätten wir die zweite Komponente negiert, wäre der Vektor auch senkrecht, würde aber nach rechts weisen.

#23: Der Richtungsvektor vri2 hat die Länge 1, weil vri1 auch die Länge 1 hat. Normieren also nicht nötig.

#24: ----------------------------------

#25: Jetzt ist der Drehkreis fertig:

#26: DrehxKreisPkt ≔ DrehMiPux + DrehRadx·(COS(α)·Drehxvri1ne + SIN(α)·Drehxvri2ne)

#27: Wir rechnen das aus:

#28: $$\mathrm{DrehxKreisPkt} := [x,\ 0,\ 0] + \sqrt{(y^2 + z^2)}\cdot\left(\mathrm{COS}(\alpha)\cdot\left[0,\ \frac{y}{\sqrt{(y^2 + z^2)}},\ \frac{z}{\sqrt{(y^2 + z^2)}}\right] + \mathrm{SIN}(\alpha)\cdot\left[0,\ -\frac{z}{\sqrt{(y^2 + z^2)}},\ \frac{y}{\sqrt{(y^2 + z^2)}}\right]\right)$$

#29: Der Betrag √(y^2 + z^2) kürzt sich offensichtlich weg:

#30: DrehxKreisPkt ≔ [x, 0, 0] + (COS(α)·[0, y, z] + SIN(α)·[0, −z, y])

#31: Wir fassen die Summe zu einem Vektor zusammen:

#32: DrehxKreisPkt ≔ [x, y·COS(α) − z·SIN(α), y·SIN(α) + z·COS(α)]

#33: Als Befehl geschrieben ergibt das:

#34: ----------------------------------

#35: $$\mathrm{Drehe\_v\_um\_x}(v,\ \alpha) := \left[v_1,\ v_2\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - v_3\cdot\mathrm{SIN}(\alpha),\ v_2\cdot\mathrm{SIN}(\alpha) + v_3\cdot\mathrm{COS}(\alpha)\right]$$

#36: ----------------------------------

#37: In der Praxis ist die Drehformel recht umständlich, wenn man mehrere Drehungen, Streckung usw. hintereinander ausführen will. Man schreibt sie deshalb als Matrizenmultiplikation, weil man Matrizen für mehrere Operationen einfach multiplizieren kann:

#38: [x, y·COS(α) − z·SIN(α), y·SIN(α) + z·COS(α)]

#39: In Matrizenschreibweise ist das:

$$\#40:\quad [x,\ y,\ z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & -\ \mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#41: Probe:

$$\#42:\quad [x,\ y,\ z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & -\ \mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix} = [x,\ y\cdot\mathrm{COS}(\alpha) - z\cdot\mathrm{SIN}(\alpha),$$

$$z\cdot\mathrm{COS}(\alpha) + y\cdot\mathrm{SIN}(\alpha)]$$

#43: Die Rechenregel für Matrizen lautet: 'Zeile mal Spalte'. Hier wurde gerechnet:

#44: SKP $[x,y,z]\bullet[1,0,0] = x*1 + y*0 + z*0 = x$, ergibt 1. Komponente des Ergebnisses.

#45: SKP $[x,y,z]\bullet[0,\cos(\alpha),-\sin(\alpha)] = x*0 + y*\cos(\alpha) - z*\sin(\alpha) = ..$, ergibt 2. Komponente des Ergebnisses.

#46: SKP $[x,y,z]\bullet[0,\sin(\alpha), \cos(\alpha)] = x*0 + y*\sin(\alpha) + z*\cos(\alpha) = ..$, ergibt 3. Komponente des Ergebnisses.

#47: ----------------------------------

#48: Die Matrix für Drehungen um die x-Achse ist also, wenn der zu drehende Vektor links steht:

$$\#49:\quad \mathrm{MDrehx}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & -\ \mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#50: ----------------------------------

#51: Beispiele:

$$\#52:\quad [0,\ 1,\ 0] \bullet \mathrm{MDrehx}(90°) = [0,\ 0,\ 1]$$

$$\#53:\quad [0,\ 1,\ 0] \bullet \mathrm{MDrehx}(180°) = [0,\ -1,\ 0]$$

#54: $[0, 1, 0]\cdot \mathrm{MDrehx}(60°) = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

#55: $[3, 2, 1]\cdot \mathrm{MDrehx}(90°) = [3, -1, 2]$

#56: ---------------------------------

#57: Die Matrix für Drehungen um die y-Achse ist, wenn der zu drehende Vektor links steht:

#58: $$\mathrm{MDrehy}(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathrm{COS}(\alpha) & 0 & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{SIN}(\alpha) & 0 & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#59: $[1, 0, 0]\cdot \mathrm{MDrehy}(90°) = [0, 0, 1]$

#60: $[1, 1, 0]\cdot \mathrm{MDrehy}(90°) = [0, 1, 1]$

#61: ---------------------------------

#62: Die Matrix für Drehungen um die z-Achse ist, wenn der zu drehende Vektor links steht:

#63: $$\mathrm{MDrehz}(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) & 0 \\ -\mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#64: $[1, 0, 0]\cdot \mathrm{MDrehz}(90°) = [0, 1, 0]$

#65: $[1, 1, 0]\cdot \mathrm{MDrehz}(90°) = [-1, 1, 0]$

#66: ---------------------------------