#1: Lineare Abbildungen: Drehung von Objekten

#2: Drehung von Objekten, nicht nur von einzelnen Punkten, um die Achsen

#3: ----------------------------------

#4: Die Drehmatrizen haben wir schon im vorhergehenden Papier hergeleitet:

#5: $$\mathrm{MDrehx}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & -\mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#6: $$\mathrm{MDrehy}(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathrm{COS}(\alpha) & 0 & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{SIN}(\alpha) & 0 & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#7: $$\mathrm{MDrehz}(\alpha) := \begin{bmatrix} \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) & 0 \\ -\mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#8: ----------------------------------

#9: Merke:

#10: Einen einzelnen Punkt [x,y,z] dreht man, indem man 'Punkt mal Drehmatrix' ausrechnen lässt:

#11: $$[x, y, z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \\ 0 & -\mathrm{SIN}(\alpha) & \mathrm{COS}(\alpha) \end{bmatrix}$$

#12: Der Punkt muss als Zeilenvektor links von der Drehmatrix stehen!

#13: ---------

#14: Einen Vektor von Punkten, die zusammen ein Objekt darstellen, dreht man, indem man 'Objekt mal Drehmatrix' ausrechnen lässt:

#15: Objekt := [p1, p2, p3, p4, p5]

#16: $$[p1, p2, p3, p4, p5] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{COS}(\alpha) & \mathrm{SIN}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$\lfloor\ 0 \quad -\mathrm{SIN}(\alpha) \quad \mathrm{COS}(\alpha)\ \rfloor$

#17: Das Objekt muss aus lauter Zeilenvektoren bestehen, die durch Kommata, nicht durch Semikola getrennt sind.

#18: ----------------------------------

#19: ----------------------------------

#20: Beispiel: Drehung einer Pyramide um die x-Achse

#21: p1 ≔ 2·[1, 1, 0]

#22: p2 ≔ 2·[-1, 1, 0]

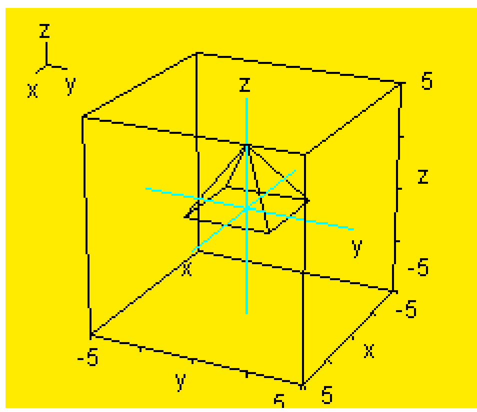
#23: p3 ≔ 2·[-1, -1, 0]

#24: p4 ≔ 2·[1, -1, 0]

#25: p5 ≔ [0, 0, 3]

#26: Pyra ≔ [p1, p2, p3, p4, p1, p5, p2, p5, p3, p5, p4]

#27: Pyramide in Normallage:



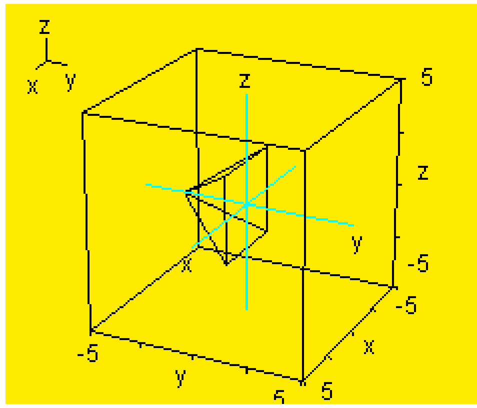
#28: ----------------------------------

#29: Drehung um die x-Achse:

#30: Pyra·MDrehx(90°)

$$\#31:\quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



#32: Die Pyramide ist jetzt von der Ausgangslage um 90 Grad um die x-Achse nach links gedreht worden.

#33: ----------------------------------

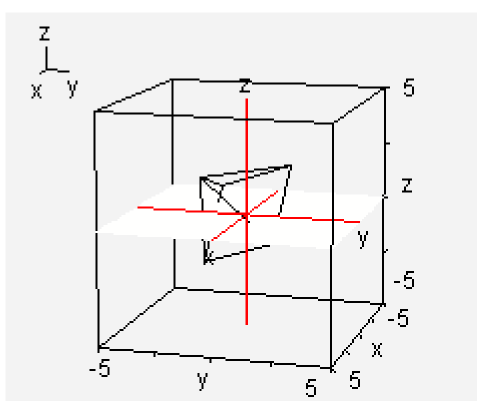
#34: Das schöne an den Matrizen ist, dass man damit die Abbildungen einfach durch Multiplkation nacheinander ausführen kann.

#35: ----------------------------------

#36: Jetzt drehen wir mehrfach: 90° um die x-Achse, 60° um die z-Achse und 45° um die y-Achse:

#37: Pyra·MDrehx(90°) • MDrehz(60°) • MDrehy(45°)

#38: [x, y, 0]



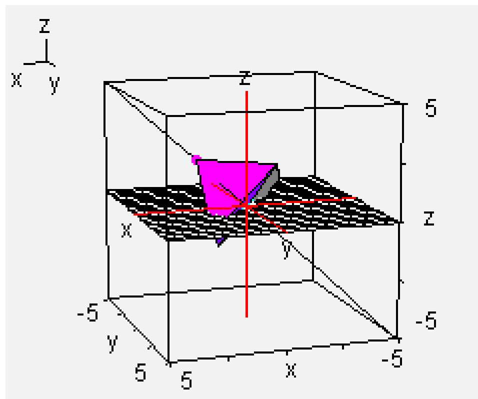
#39: Wenn man wissen will, was z.B. aus der Spitze p5 geworden ist:

#40: p5·MDrehx(90°) • MDrehz(60°) • MDrehy(45°)

#41: $$\left[\frac{3\cdot\sqrt{6}}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{6}}{4}\right]$$

#42: $$\lambda\cdot\left[\frac{3\cdot\sqrt{6}}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{6}}{4}\right]$$

#43: POLYGON_FILL(Pyra·MDrehx(90°) • MDrehz(60°) • MDrehy(45°))



#44: ----------------------------------

#45: ----------------------------------