#1: Spiegelung von Objekten an einem beliebigen Punkt

#2: ------------------------------------

#3: Punktspiegelung als Funktion

#4: ------------------------------------

#5: Gegeben sei ein Punkt p der am Punkte Sp gespiegelt werden soll.

#6: $p :\!= [p_1, p_2, p_3]$

#7: $Sp :\!= [Sp_1, Sp_2, Sp_3]$

#8: ------------------------------------

#9: Der Vektor vom Punkte p zum Spiegelpunkt Sp ist der Vektor:

#10: $Sp - p$

#11: Der Vektor weist vom Punkte p zum Spiegelpunkt Sp hin!

#12: Der Vektor weist vom Punkte p zum Spiegelpunkt Sp hin!

#13: Um den an Sp gespiegelten Punkt p′ zu berechnen, brauche ich diesen Vektor nur von Sp aus zu addierern:

#14: $pSpiegel :\!= Sp + (Sp - p)$

#15: $pSpiegel = 2 \cdot Sp - p$

#16: Das ergibt als Funktion:

#17: $Spiegelungpunkt(p, Sp) :\!= 2 \cdot Sp - p$

#18: ------------------------------------

#19: Das ergibt als Funktion mit Koordinaten:

#20: $PspiegelungKurz(p, Sp) :\!= [2 \cdot Sp_1 - p_1, 2 \cdot Sp_2 - p_2, 2 \cdot Sp_3 - p_3]$

#21: ------------------------------------

#22: Beispiel: Pyramiden tanzen im Kreis:

#23: Gegeben ist eine kleine Pyramide

#24: $p1 :\!= [1, 1, 0]$

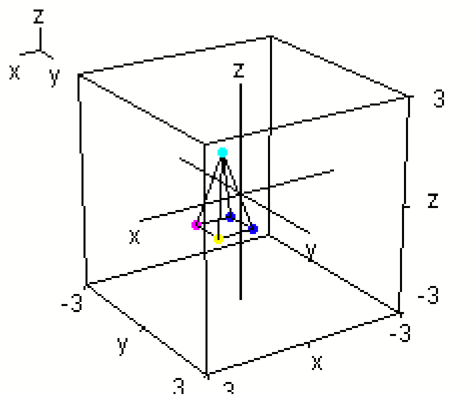
#25: $p2 :\!= [2, 1, 0]$

#26: $p3 :\!= [2, 2, 0]$

#27: $p4 :\!= [1, 2, 0]$

#28: p5 ≔ [1.5, 1.5, 2]

#29: Pyra ≔ [p1, p2, p3, p4, p1, p5, p2, p3, p5, p4]



#30: ------------------------------------

#31: Ich definiere über der Spitze einen Kreis und spiegele an einigen Kreispunkten:

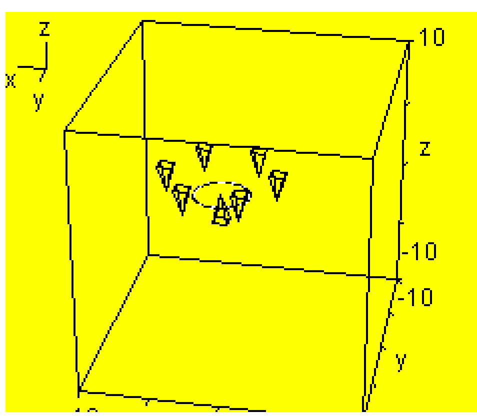
#32: krspktxz(t) ≔ [2·COS(t) + 1.5, 2·SIN(t) + 1.5, 2]

#33: VECTOR(krspktxz(t), t, 0, 360°, 5°)

#34: VECTOR(PspiegelungKurz(Pyra_i, krspktxz(0°)), i, 1, DIM(Pyra), 1)

#35: VECTOR(PspiegelungKurzZeile(Pyra_i, krspktxz(60°)), i, 1, DIM(Pyra), 1)

#36: Dito für 120, 180, 240 und 300 Grad:



#37: ------------------------------------

#38: ------------------------------------

#39: Punktspiegelung als Matrizen–Multiplikation

#40: ------------------------------------

#41: Wenn man mit Matrizen arbeiten will, kann man wie folgt vorgehen:

#42: 1. Punkt homogenisieren:

#43: $\mathrm{Homo}(p) := \left[p_1, p_2, p_3, 1\right]$

#44: 2. Punkt in den Ursprung verschieben:

#45: $$\left[p_1, p_2, p_3, 1\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sp_1 & -Sp_2 & -Sp_3 & 1 \end{bmatrix} = \left[p_1 - Sp_1, p_2 - Sp_2, p_3 - Sp_3, 1\right]$$

#46: 3. Punkt spiegeln am Ursprung:

#47: $$\left[p_1 - Sp_1, p_2 - Sp_2, p_3 - Sp_3, 1\right] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[-p_1 + Sp_1, -p_2 + Sp_2, -p_3 + Sp_3, 1\right]$$

#48: 4. Gespiegelten Punkt wieder 'hochschieben':

#49: $$\left[-p_1 + Sp_1, -p_2 + Sp_2, -p_3 + Sp_3, 1\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Sp_1 & Sp_2 & Sp_3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\left[-p_1 + 2\cdot Sp_1,\ -p_2 + 2\cdot Sp_2,\ -p_3 + 2\cdot Sp_3,\ 1\right]$$

#50: 5. Homogenisierung aufheben:

#51: $$\left[-p_1 + 2\cdot Sp_1,\ -p_2 + 2\cdot Sp_2,\ -p_3 + 2\cdot Sp_3,\ 1\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[-p_1 + 2\cdot Sp_1,\ -p_2 + 2\cdot Sp_2,\ -p_3 + 2\cdot Sp_3\right]$$

#52: ------------------------------------

#53: Ergebnis:

#54: $$\text{Punktspiegelung}(p, Sp) := \left[-p_1 + 2\cdot Sp_1,\ -p_2 + 2\cdot Sp_2,\ -p_3 + 2\cdot Sp_3\right]$$

#55: Das ist die gleiche Funktion wie die zuerst hergeleitete:

#56: $$\text{PspiegelungKurz}(p, Sp) := \left[2\cdot Sp_1 - p_1,\ 2\cdot Sp_2 - p_2,\ 2\cdot Sp_3 - p_3\right]$$

#57: ------------------------------------

#58: Punktspiegelung bedeutet also: homogenisieren–verschieben–spiegeln–verschieben–enthomogenisieren

#59: Weil das Homogenisieren (das Hinzufügen der 1) keine Matrizenoperation ist, kann man die Punktspiegelung an einem beliebigen Punkt letzlich nur als Funktion, nicht als reine Matrizenoperation darstellen.

#60: In der Praxis der Computergraphik wird immer nur mit homogenisierten Koordinaten gerechnet, dann hat man die reine

Matrizenoperationen 'verschieben-spiegeln-verschieben' für die Punktspiegelung.

#61: Zur Darstellung auf dem Schirm wird dann die vierte Koordinate weggelassen, weggefiltert.

#62: -------------------------------------