

## Vektorräume

Grob, anschaulich:

Eine Menge von Objekten ist ein Vektorraum, wenn die Objekte bezüglich der inneren Verknüpfung zwischen den Objekten eine additive Gruppe bilden und wenn eine vernünftige äußere Multiplikation erklärt ist.

Genauer:

Eine nichtleere Menge  $V$  heißt Vektorraum über dem Körper  $K$  wenn

1. eine Addition in  $V$  erklärt ist "+":  $V \times V \rightarrow V$

die folgenden Gesetzen genügt:

- wenn  $a \in V$  und  $b \in V$ , dann auch  $(a+b) \in V$
- $(a+b)+c = a+(b+c)$  (Assoziativgesetz)
- es gibt ein neutrales Element  $0$  mit  $a+0 = a$
- es gibt zu jedem  $a$  einen Gegenvektor  $(-a)$  mit  $a+(-a) = 0$
- es gilt  $a+b = b+a$  (Kommutativgesetz)

und wenn

2. eine Multiplikation mit Skalaren aus dem Körper  $K$  erklärt ist,

die folgenden Gesetzen genügt:

- wenn  $a \in V$  und  $k \in K$ , dann  $(k \cdot a) \in V$
- $k(a+b) = ka + kb$
- $(k+l)a = ka + la$
- $k(la) = (kl)a$
- $1 \cdot a = a$

Der Vektorraum heißt normiert, wenn eine Norm erklärt ist.

Der Vektorraum heißt Banachraum, wenn er bezüglich der von der Norm induzierten Metrik vollständig ist.

(Ein VR ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.)

#1: Beispiele für Vektorräume:

#2: A)  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$ ,  $\dots \mathbb{R}^n$ ,  $\dots \mathbb{R}^\infty$

- #3: B) Folgenräume (alle, konvergente, beschränkte usw. )
- #4: C) Funktionenräume (alle, stetige, differenzierbare usw.)
- #5: D) Matrizen, Magische Quadrate, u.ä.
- #6: E) Drehungen z.B. bei Rubiks Qube, u.ä.
- #7: F) Physik: Translationen, Wellenfunktionen, Quantenmechanik,  
Farbraum usw.

#8: -----

#9: Beispiel konkret:

#10: Der Vektorraum der Parabeln

#11:  $V = \{ p \mid p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \}$

#12: -----

#13: 1. Addition in V: Parabel plus Parabel muss Parabel ergeben.

#14:  $p(x) + q(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) + (d \cdot x^2 + e \cdot x + f)$

#15:  $p(x) + q(x) = (a + d) \cdot x^2 + (b + e) \cdot x + (c + f)$

#16: Rechts steht wieder eine Parabel.

#17: -----

#18: Assoziativgesetz: klar

#19: Neutrales Element:  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

#20: Gegenvektor:  $-a \cdot x^2 - b \cdot x - c$

#21: Kommutativgesetz: klar

#22: Skalare Multiplikation:

#23:  $k \cdot p(x) = k \cdot a \cdot x^2 + k \cdot b \cdot x + k \cdot c$

#24: Rest des Nachweises erspare ich mir.

#25: -----

#26: -----

#27: Eine Gerade im Raum der Parabeln:

#28: Anfangsvektor z.B.:  $p_a(x) := x^2 + x + 1$

#29: Richtungsvektor z.B.:  $\text{pri}(x) := 2x^2 + 2x + 2$

#30:  $\text{pa}(x) := x^2 + x + 1$

#31:  $\text{pri}(x) := 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2$

#32:  $\text{Gerade\_in\_V}(\lambda) := \text{pa}(x) + \lambda \cdot \text{pri}(x)$

#33:  $\text{Gerade\_in\_V}(\lambda) := x^2 \cdot (2 \cdot \lambda + 1) + x \cdot (2 \cdot \lambda + 1) + 2 \cdot \lambda + 1$

#34:  $\text{VECTOR}(\text{Gerade\_in\_V}(\lambda), \lambda, -3, 3, 0.2)$



#35: -----

#36: Eine Ebene im Raum der Parabeln:

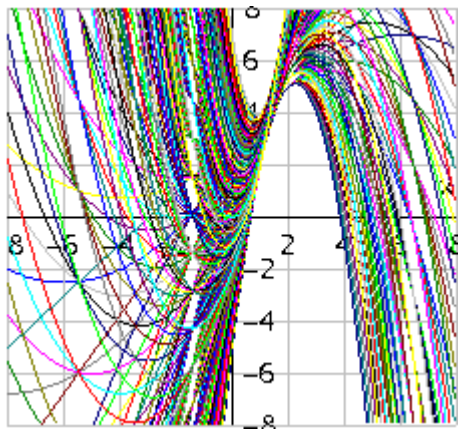
#37:  $\text{pa}(x) := x^2 + x + 1$

#38:  $\text{pri1}(x) := x^2 - 2 \cdot x + 1$

#39:  $\text{pri2}(x) := -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$

#40:  $\text{Ebene\_in\_V}(s, t) := \text{pa}(x) + s \cdot \text{pri1}(x) + t \cdot \text{pri2}(x)$

#41:  $\text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{Ebene\_in\_V}(s, t), s, -2, 2, 0.25), t, -2, 2, 0.25)$



#42: -----