#1: Normen in Vektorräumen

#2: ---------------------------------------

#3: Eine Norm weist jedem Vektor eine Zahl zu, z.B. den Abstand vom Ursprung.

#4: Was aber 'Abstand' ist, das ist auch im realen Leben durchaus verschieden.

#5: Der 'Abstand' zwischen Berlin und Rom ist z.B. für Autofahrer, Radfahrer und Flieger durchaus unterschiedlich.

#6: Voraussetzung für eine 'Abstands'-Berechnung ist, dass ein Vektor eine 'Länge' hat.

#7: Der 'Abstand' zwischen zwei Punkten (Vektoren) ist dann die 'Länge' der Differenz.

#8: Die 'Länge' eines Vektors heißt verallgemeinert 'Norm'.

#9: ---------------------------------------

#10: Eine Abbildung N: V --->R+o, die jedem Vektor eine nicht-negative Zahl zuweist, heißt Norm, wenn gilt:

#11: 1. Nur der Nullvektor hat die Norm 0.

#12: 2. Konstante Skalare darf man als Betrag vorziehen: $N(\lambda*v)=|\lambda|*N(v)$.

#13: 3. Die Dreiecksungleichung gilt: $N(v+w) \le N(v) + N(w)$.

#14: Geschrieben wird händisch: Norm von x ist : || x ||.

#15: ---------------------------------------

#16: Beispiele für Normen im R^n:

#17: Hilbert-Norm:

#18: $|| v ||:=\sqrt{(<v,v>)}$ (Wurzel aus dem SKP, wenn es ein SKP gibt)

#19: -----------

#20: New Yorker Taxifahrer-Norm:

#21: $\mathrm{Taxinorm}(v) := \sum_{i=1}^{n} \left| v_i \right|$

#22: -----------

#23: Euklidische Norm: (das verstehen mathematisch Ungebildete immer

als 'der Betrag')

#24: $\mathrm{EuklidNorm}(v) := \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left|v_i\right|^2\right)}$

#25: -----------

#26: Die euklidische ist ein Spezialfall der allgemeinen p-Norm:

#27: $p - \mathrm{Norm}(v) := \left(\sum_{i=1}^{n} \left|v_i\right|^p\right)^{1/p}$

#28: -----------

#29: Maximumsnorm:

#30: MaxNorm(v):=max({ABS(v↓i)| i=1...n})

#31: -----------

#32: In Funktionenräumen und anderen Vektorräumen gibt es andere Normen.

#33: ---------------------------------------

#34: ---------------------------------------

#35: Zum Verständnis:

#36: Man betrachte zunächst nur den R^2 und untersuche, wie ein Kreis

im R^2 in jeder der Normen aussieht.

#37: -----------

#38: Beispiel: p-Norm für p=3

#39: $\mathrm{pNorm3}(v) := \left(\left|v_1\right|^3 + \left|v_2\right|^3\right)^{1/3}$

#40: Vektoren auf einem Kreis mit Radius 4 müssen die folgende

Gleichung erfüllen:

#41: pNorm3([x, y]) = 4

#42: $(|x|^3 + |y|^3)^{1/3} = 4$

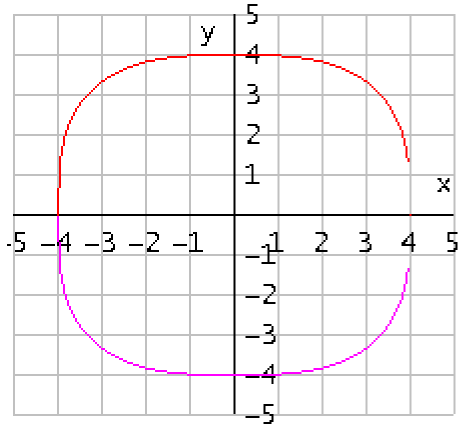
#43: $|x|^3 + |y|^3 = 4^3$

#44: $|y|^3 = 4^3 - |x|^3$

#45: $|y| = (4^3 - |x|^3)^{1/3}$

#46: $y = (4^3 - |x|^3)^{1/3} \vee y = -(4^3 - |x|^3)^{1/3}$

#47: Kreis mit Radius 4 in p-3-Norm:



#48: ---------------------------------------

#49: Merke:

#50: Wie ein Kreis, eine Kugel o.ä in einem Vektorraum aussieht, hängt davon ab, wie man 'Abstand vom Ursprung', also die Norm, definiert hat.

#51: Für Mathematiker sind 'eckige' Kreise ganz normal, wenn die Norm entsprechend gewählt wurde.

#52: ---------------------------------------