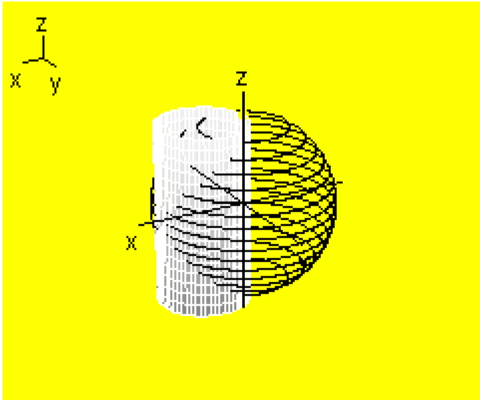
#1: Viviani-Kurve (analytische Herleitung)

#2: Allgemeiner Hintergrund: Raumkurven. Hier Schnitt von Kugel und Zylinder.

#3: --

#4: Eine Kugel und ein Zylinder schneiden sich. Der Zylinder hat den halben Kugelradius. Eine Zylinderaußenlinie liegt in der Kugelachse.



#5: --

#6: Eine Kugel mit MP=[0,0,0] und Radius 4 besteht aus den Punkten [x,y,z], bei denen für x, y und z die folgende Gleichung gilt:

#7: $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$

#8: $x^2 + y^2 = 4^2 - z^2$

#9: --

#10: Ein Zylinder mit MP=[2,0,0] und Radius 2 besteht aus den Punkten [x,y,z], bei denen für x und y die folgende Gleichung gilt:

#11: $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$

#12: $x^2 - 4\cdot x + y^2 + 4 = 4$

#13: $x^2 - 4\cdot x + y^2 = 0$

#14: $x^2 + y^2 = 4\cdot x$

#15: --

#16: Gesucht sind die [x,y,z], die auf Kugel und Zylinder zugleich liegen.

#17: Da z auf dem Zylinder frei wählbar ist, stelle ich x und y der Schnittpunkte in Abhängigkeit von z dar.

#18: Zylindergleichung:

#19: $x^2 + y^2 = 4\cdot x$

#20: Kugelgleichung:

#21: $x^2 + y^2 = 4^2 - z^2$

#22: Also muss gelten:

#23: $4\cdot x = 4^2 - z^2$

#24: ------------

#25: $x = 4 - \frac{z^2}{4}$

#26: ------------

#27: Dieser x-Wert muss auch die Kugelgleichung erfüllen:

#28: $\left(4 - \frac{z^2}{4}\right)^2 + y^2 = 4^2 - z^2$

#29: Das stelle ich nach y um:

#30: $y^2 = 4^2 - z^2 - \left(4 - \frac{z^2}{4}\right)^2$

#31: $y^2 = 4^2 - z^2 - \left(\frac{z^4}{16} - 2\cdot z^2 + 4^2\right)$

#32: $y^2 = z^2 - \frac{z^4}{16}$

#33: $y^2 = z^2 \cdot \left(1 - \frac{z^2}{16}\right)$

#34: $y^2 = \frac{z^2}{16} \cdot (16 - z^2)$

#35: ------------

#36: $y = \frac{\pm z}{4} \cdot \sqrt{(16 - z^2)}$

#37: ------------

#38: Die gesuchten Punkte sind gefunden:

#39: $\text{vivi}(z) := \left[4 - \frac{z^2}{4}, \frac{\pm z}{4} \cdot \sqrt{(16 - z^2)}, z\right]$

#40: ------------

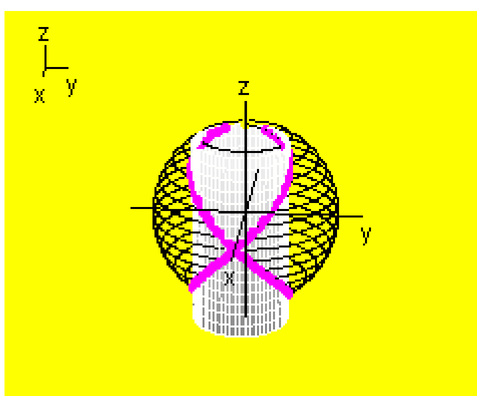
#41: Zwecks Zeichnung aufgesplittet:

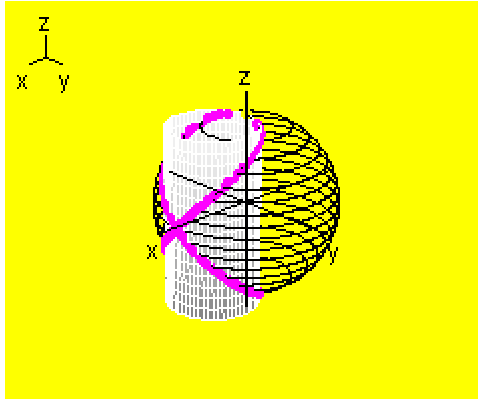
#42: $\text{VivianiA}(t) := \left[4 - \frac{t^2}{4}, \frac{t}{4} \cdot \sqrt{(16 - t^2)}, t\right]$

#43: $\text{VivianiB}(t) := \left[4 - \frac{t^2}{4}, \frac{-t}{4} \cdot \sqrt{(16 - t^2)}, t\right]$

#44: VECTOR([VivianiA(t)], t, -4, 4, 0.1)

#45: VECTOR([VivianiB(t)], t, -4, 4, 0.1)





#46: ---