

#1: Gebrochen-rationale Funktionen

#2: -----

#3: Allgemeine Form:

$$\#4: f(x) := \frac{\sum_{x=0}^k a \cdot x^n}{\sum_{x=0}^m b \cdot x^n}$$

#5: Beispiel:

$$\#6: f_1(x) := \frac{5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2}{6 \cdot x^5 + 7 \cdot x^4 + 8 \cdot x^2 + x - 1}$$

#7: -----

#8: Das Ziel ist die Bestimmung von Nullstellen, Definitionslücken, Löchern, Asymptoten, Polen, Hoch-Und Tiefpunkten usw.

#9: -----

#10: 1. Definitionslücken

#11: Alle Nullstellen des Nenners sind auf jeden Fall Definitionslücken, weil man durch null nicht teilen kann.

$$\#12: f_2(x) := \frac{(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)}{(x - 4) \cdot (x - 5) \cdot (x - 6) \cdot (x - 7)}$$

#13: f2 hat Lücken bei 4,5,6 und 7.

#14: -----

#15: 2. Nullstellen der Funktion

#16: Nullstellen der Funktion sind alle die Nullstellen des Zählers, die nicht zugleich Definitionslücken sind.

#17: In f2 sind 1,2 und 3 Nullstellen der Funktion.

#18: -----

#19: 3. Löcher

$$\#20: f_3(x) := \frac{(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 6) \cdot (x - 7)}{\dots}$$

$$(x - 4) \cdot (x - 5) \cdot (x - 6) \cdot (x - 7)$$

#21: Wenn eine Nullstelle zugleich eine Definitionslücke ist und vom gleichen Grade, dann ist die Definitionslücke die Stelle eines Loches im Graphen.

#22: In f_3 trifft das auf 6 und 7 zu.

#23: Derive berechnet aber trotzdem Funktionswerte:

#24: $f_3(6) = 30$

#25: $f_3(7) = 20$

#26: Warum? Weil Derive automatisch die identischen Terme kürzt!

#27: Mathematisch ist nämlich f_3 bei 6 und 7 stetig ergänzbar, d.h.:

#28: $\lim_{x \rightarrow 6} f_3(x) = 30$

#29: $\lim_{x \rightarrow 7} f_3(x) = 20$

#30: Derive rechnet also nicht mit f_3 , sondern mit der stetigen Ergänzung:

#31: $f_4(x) := \frac{(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)}{(x - 4) \cdot (x - 5)}$

#32: -----

#33: 4. Pol und nicht Loch

#34: Wenn eine Nullstelle zugleich eine Definitionslücke ist, aber im Nenner von höherem Grade, dann ist die Definitionslücke die Stelle eines Poles.

#35: $f_5(x) := \frac{(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 6)}{(x - 4) \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)^2}$

#36: In f_5 ist 2 Nullstelle und Lücke, aber wir können kürzen:

#37: $f_6(x) := \frac{(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 6)}{(x - 4) \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)}$

#38: In f_6 ist 2 nur noch Nullstelle des Nenners, also eine Polstelle.

Beweis:

#39: $\lim_{x \rightarrow 2} f_6(x) = \pm\infty$

#40: -----

#41: 5. Gelochte Nullstellen

#42: Wenn eine Nullstelle zugleich eine Definitionslücke ist, aber im Zähler von höherem Grade, dann ist die Definitionslücke eine Nullstelle.

#43: $f_7(x) := \frac{(x-1) \cdot (x-2)^3 \cdot (x-3) \cdot (x-6)}{(x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-2)^2}$

#44: In f_7 ist 2 Nullstelle und Lücke, aber wir können kürzen:

#45: $f_8(x) := \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-6)}{(x-4) \cdot (x-5)}$

#46: In f_8 ist 2 nur noch Nullstelle. Da aber f_7 die ursprüngliche Funktion war, geht f_7 bei $x=2$ durch null, ist aber dort nicht definiert. Das ist eine gelochte Nullstelle.

#47: -----

#48: 6. Pole

#49: Wenn eine Definitionslücke nicht zugleich Nullstelle des Zählers ist, dann liegt dort ein Pol vor.

#50: Das ist auch der Fall, wenn die Nullstelle im Nenner von höherem Grade als im Zähler ist. Siehe 4.

#51: $f_9(x) := \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1.5)}$

#52: Bei -2 und $+1.5$ liegen Pole. Beweis:

#53: $\lim_{x \rightarrow -2} f_9(x) = \pm\infty$

#54: $\lim_{x \rightarrow 1.5} f_9(x) = \pm\infty$

#55: -----

#56: 7. Asymptoten

#57: Eine Funktion $asym$ heißt Asymptote der Funktion f , wenn die Differenz zwischen $f(x)$ und $asym(x)$ gegen null geht, wenn x gegen $+\infty$ und $-\infty$ läuft.

#58: 7a) Wenn der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist, dann ist die x -Achse die Asymptote.

$$\#59: f_{10}(x) := \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(x-0) \cdot (x+2) \cdot (x-1.5)}$$

$$\#60: \lim_{x \rightarrow \infty} f_{10}(x) = 0$$

#61: -----

#62: 7b) Wenn der Grad des Zählers gleich dem des Nenners ist, dann ist eine Konstante die Asymptote.

$$\#63: f_{11}(x) := \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(x-0) \cdot (x+2) \cdot (x-1.5)}$$

$$\#64: - \frac{2}{7 \cdot (2x-3)} - \frac{48}{7 \cdot (x+2)} + 2$$

$$\#65: \lim_{x \rightarrow \infty} f_{11}(x) = 2$$

#66: Die Bruchterme gehen gegen null, die 2 bleibt.

$$\#67: asym_{11}(x) := 2$$

$$\#68: \lim_{x \rightarrow \infty} (f_{11}(x) - asym_{11}(x)) = 0$$

#69: -----

#70: 7c) Wenn der Grad des Zählers größer als der des Nenners ist, dann ist eine Funktion vom Differenzgrad die Asymptote.

$$\#71: f_{12}(x) := \frac{2 \cdot x^3 \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(x-0) \cdot (x+2) \cdot (x-1.5)}$$

$$\#72: \frac{2 \cdot x^3 \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(x-0) \cdot (x+2) \cdot (x-1.5)}$$

$$\#73: \quad - \frac{9}{14 \cdot (2 \cdot x - 3)} - \frac{192}{7 \cdot (x + 2)} + 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + \frac{27}{2}$$

$$\#74: \quad \text{asym12}(x) := 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + \frac{27}{2}$$

$$\#75: \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f12(x) - \text{asym12}(x)) = 0$$

#76: 7d) Wie bestimmt man die Asymptote? Einfach aus multiplizieren!
(per Hand: Polynomdivision).

#77: -----