#1: zu BA6 e) Fibonacci-Folge (Kaninchen-Vermehrung)

#2: ------------------------------------

#3: Die Folge wurde erstmals um 450 v.u.Z. in Indien beschrieben.

#4: In Europa wurde sie 1202 von FIBONACCI veröffentlicht.

#5: Es dauerte über 600 Jahre bis BINET 1834 eine explizite Formel angeben konnte.

#6: ------------------------------------

#7: Definition umgangssprachlich: Jeder Nachfolger ist die Summe der beiden Vorgänger.

#8: ------------------------------------

#9: Die Definition in DERIVE-Notation:

#10:

```
f(n) :=
  If n = 1
     1
     If n = 2
        1
        f(n - 2) + f(n - 1)
```

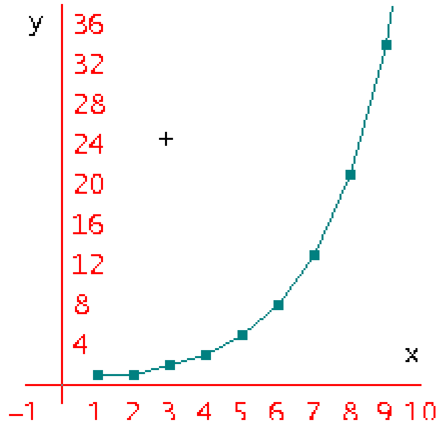
#11: ------------------------------------

#12: Die Werte:

#13: VECTOR([n, f(n)], n, 1, 10, 1)

#14:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 5 \\ 6 & 8 \\ 7 & 13 \\ 8 & 21 \\ 9 & 34 \\ 10 & 55 \end{bmatrix}$$



#15: ------------------------------------

#16: Explizite Formel?

#17: Untersuchung mit Startwerten a und b:

#18:
```
fallgemein(n) :=
  If n = 1
     a
     If n = 2
        b
        fallgemein(n - 2) + fallgemein(n - 1)
```

#19: VECTOR([n, fallgemein(n)], n, 1, 10, 1)

#20:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & a + b \\ 4 & a + 2\cdot b \\ 5 & 2\cdot a + 3\cdot b \\ 6 & 3\cdot a + 5\cdot b \\ 7 & 5\cdot a + 8\cdot b \\ 8 & 8\cdot a + 13\cdot b \\ 9 & 13\cdot a + 21\cdot b \\ 10 & 21\cdot a + 34\cdot b \end{bmatrix}$$

#21: Man erkennt, dass hier zwei Folgen addiert werden, und dass beide nicht-linear wachsen.

#22: Der Form nach könnten die Teilfolgen Exponentialfunktionen sein wie 2^x oder 3^x usw.

#23: Bei Folgen heißt dieser Typ -geometrische- Folge, also 2^n oder 3^n usw.

#24: Ein erster Versuch:

#25: $\text{ftest}(n) := k \cdot q^{n}$

#26: Nach der Rekursionsformel müsste gelten:

#27: $\text{ftest}(n) = \text{ftest}(n - 1) + \text{ftest}(n - 1)$

#28: Also:

#29: $k \cdot q^{n} = k \cdot q^{n-2} + k \cdot q^{n-1}$

#30: $q^{n} = q^{n-2} + q^{n-1}$

#31: Wenn das für alle n gilt, dann auch für q=2:

#32: $q^{2} = q^{2-2} + q^{2-1}$

#33: $q^{2} = q^{0} + q^{1}$

#34: $q^{2} = 1 + q$

#35: $q^{2} - q - 1 = 0$

#36: $\text{SOLVE}(q^{2} - q - 1 = 0, q, \text{Real})$

#37: $q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \lor q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

#38: $q = -0.6180339887 \lor q = 1.618033988$

#39: Einer dieser q-Werte oder beide müssen in der expliziten Formel vorkommen.

#40: Diese Zahlen tauchen auch beim Goldenen Schnitt und als Fixpunkte in der Chaostheorie auf.

#41: Sie sind aber noch nicht die Lösung, denn q^3 ist z.B. nicht 2, wie in der Fibonaccifolge:

#42: $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{3} = \sqrt{5} + 2$

$\left(\quad 2 \quad \right)$

#43: Aber mit folgender Rechnung klappt es:

#44: $$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)=2$$

#45: --

#46: Das hat 1843 Franzose BINET herausgefunden. Formel von BINET:

#47: $$\mathrm{fLsg}(n) :=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

#48: --

#49: Probe:

#50: VECTOR([n, fLsg(n)], n, 1, 10, 1)

#51: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 5 \\ 6 & 8 \\ 7 & 13 \\ 8 & 21 \\ 9 & 34 \\ 10 & 55 \end{bmatrix}$$

#52: --

#53: Die mathematisch exakte Herleitung der Formel von BINET ist sehr aufwändig.

#54: Ich habe es lange versucht, aber keine wirklich einfache Darstellung geschafft.

#55: Man findet jedoch tausende Seiten zu Fibonacci und Binet im Internet.

#56: Es gibt sogar eine Zeitschrift namens FIBONACCI für alle

Forschungsergebnisse, die mit Fibonacci-Folgen zu tun haben.

#57: --