

#1: Herleitung der e-funktion

#2: -----

#3:  $f(x) := a^x$

#4: Die Ableitung ist:

#5:  $a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$

#6:  $a^x \cdot \ln(a)$

#7:  $f_1(x) := a^x \cdot \ln(a)$

#8: -----

#9: Berechnung diverser Limes:

#10: VECTOR  $\left( \left[ a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \right], a, 2, 3, \frac{1}{10} \right)$

#11: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0.6931471805 \\ 2.1 & 0.7419373447 \\ 2.2 & 0.7884573603 \\ 2.3 & 0.8329091229 \\ 2.4 & 0.8754687373 \\ 2.5 & 0.9162907318 \\ 2.6 & 0.955511445 \\ 2.7 & 0.993251773 \\ 2.8 & 1.029619417 \\ 2.9 & 1.064710736 \\ 3 & 1.098612288 \end{bmatrix}$$

#12: Zwischen  $a=2.7$  und  $a=2.8$  muss es ein  $a$  geben, für das der Limes 1 ist:

#13:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$

$h \rightarrow 0$       $h$

#14: NSOLVE  $\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1, a \right)$

#15:  $a = 2.718281745$

#16: SOLVE  $\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1, a, \text{Real} \right)$

#17:  $a = e$

#18: Die Zahl 2,718... heißt Eulersche Zahl  $e$

#19: -----

#20: Es gilt also für die Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis  $e$ :

#21:  $\left( \frac{d}{dx} \right)^1 e^x = e^x$

#22:  $\left( \frac{d}{dx} \right)^2 e^x = e^x$

#23:  $\left( \frac{d}{dx} \right)^3 e^x = e^x$

#24: Alle Ableitungen von  $e^x$  sind  $e^x$ .

#25: Die Tangentsteigung von  $e^x$  bei  $x$  ist  $e^x$ .

#26: Die Tangentsteigung von  $e^x$  bei  $x=0$  ist 1.

#27: -----

#28: Andere Herleitung:

#29: Es soll gelten:

#30:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$

#31: d.h. für  $h$  nahe 0 muss gelten:

#32:  $\frac{a^h - 1}{h} \sim 1$

$$\#33: a^h \cdot \sim \cdot h$$

$$\#34: a \cdot \sim \cdot 1 + h$$

#35: Wenn  $h$  eine Folge  $1/n$  ist, bedeutet das:

$$\#36: a^{1/n} \cdot \sim \cdot 1 + \frac{1}{n}$$

#37: Wir potenzieren mit  $n$ :

$$\#38: a \cdot \sim \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

#39:  $n$  kann irgendwelche Werte  $x$  gegen  $\infty$  durchlaufen:

$$\#40: a \cdot \sim \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

#41: Also wird für  $x$  gegen  $\infty$  gelten:

$$\#42: a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

#43: -----

#44: Wir berechnen den Grenzwert:

$$\#45: \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\#46: \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.718281828$$

#47: Zeile 45 ist die Berechnungsform von  $e$ . Für größere  $x$  bekommt man genauere Werte von  $e$ .

#48: -----