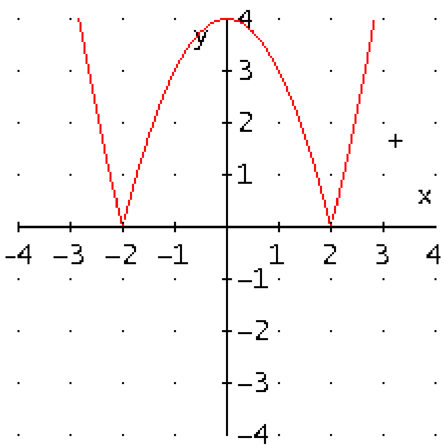
#1: Beweis der Nicht-Differenzierbarkeit

#2: Fall 1: Funktion ist stetig, aber nicht differenzierbar, weil eine Spitze Knick im Graphen vorliegt. Geschieht regelmäßig bei Betragsfunktionen.

#3: Gegeben:

#4: $f(x) := \left|x^2 - 4\right|$

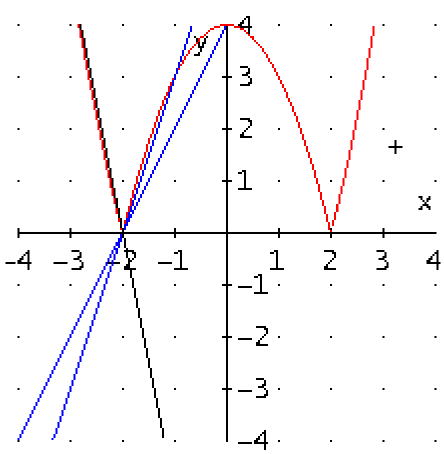


#5: Behauptung: f ist bei x=-2 und bei x=2 nicht differenzierbar.

#6: Anschaulicher Hintergrund: Der Graph hat dort jeweils ein Knick, man könnte also zwei Tangenten anlegen.

#7: Differenzierbarkeit bedeutet jedoch, dass es genau eine Tangente gibt.

#8: Man beweist es, indem man den Grenzwert der Sekantensteigungen für Sekanten rechts und links betrachtet.



#9: ----------------------------

#10: ----------------------------

#11: Beweis der Behauptung für x=-2 bei Rechnung mit Hand:

#12: Die Sekantensteigung ist:

#13: $$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

#14: $$\frac{\left|(-2 + h)^2 - 4\right| - \left|(-2)^2 - 4\right|}{h}$$

#15: $$\frac{\left|(-2)^2 - 4\cdot h + h^2 - 4\right| - |4 - 4|}{h}$$

#16: $$\frac{\left|- 4\cdot h + h^2\right|}{h}$$

#17: $$\frac{|h\cdot(-4 + h)|}{h}$$

#18: $$\frac{|h|\cdot|-4 + h|}{h}$$

#19: Wir lassen h von rechts gegen null laufen, z.B. mit h = 1/n. D.h.

h ist positiv.

#20: Wenn h positiv ist, dann ist abs(h)/h = 1, also gilt:

#21: $$\frac{|h|\cdot|-4 + h|}{h} = \frac{|-4 + h|}{1}$$

#22: Für h gegen null gilt dann:

#23: $$\lim_{h\to 0+} \frac{|-4 + h|}{1}$$

#24: 4

#25: Der Grenzwert der Sekantensteigungen von rechts ist +4.

#26: Wir lassen h von links gegen null laufen, also h<0, z.B. h = -1/n.

#27: Wenn h negativ ist, dann ist abs(h)/h = -1, also gilt:

$$|h|\cdot|-4 + h| \qquad |-4 + h|$$

#28: $\dfrac{\qquad}{h} = \dfrac{\qquad}{-1}$

#29: $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{|-4 + h|}{-1}$

#30: -4

#31: Der Grenzwert der Sekantensteigungen von links ist -4.

#32: Da die Grenzwerte der Sekantensteigungen verschieden sind, ist f an der Stelle $x=-2$ nicht differenzierbar. q.e.d.

#33: ----------------------------

#34: ----------------------------

#35: Beweis der Behauptung für $x=-2$ bei Rechnung mit DERIVE:

#36: Die Sekantensteigung ist:

#37: $\dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

#38: Grenzwert von rechts (h gegen 0 von rechts:)

#39: $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

#40: 4

#41: Grenzwert von links (h gegen 0 von links:)

#42: $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

#43: -4

#44: Da die Grenzwerte der Sekantensteigungen verschieden sind, ist f an der Stelle $x=-2$ nicht differenzierbar. q.e.d.

#45: ----------------------------

#46: Aufgabe: Führen Sie den Beweis für $x=+2$ per Hand durch.

#47: ----------------------------