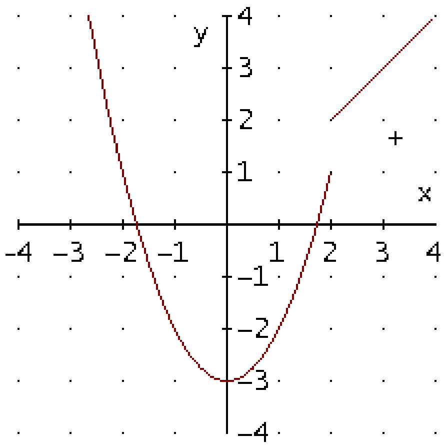
#1: Stetigkeit und Nicht-Stetigkeit

#2: Ein Funktion ist stetig bei xo, wenn der Grenzwert der Funktionswerte bei jeder Annäherung an xo die gleich Zahl ist und wenn diese Zahl auch ein Funktionswert ist.

#3: ---

#4: Fall 1: Sprung im Graphen, aber beim Sprung gibt es einen Funktionswert:

#5:
```
f(x) :=
  If x ≤ 2
     x^2 - 3
     x
```



#6: Behauptung: f ist an der Sprungstelle x=2 nicht stetig!

#7: ---

#8: Beweis:

#9: f ist für x=2 definiert, d.h. es gibt einen Funktionswert:

#10: $f(2) = 1$

#11: Ich betrachte den Grenzwert der Funktionswerte für x-Werte von links:

#12: $\lim_{x \to 2-} f(x)$

#13: $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3)$

#14: $\lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = \left(\lim_{x \to 2-} x^2\right) - 3$

#15: $\lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 4 - 3$

#16: $\lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$

#17: Ich betrachte den Grenzwert der Funktionswerte für x-Werte von

rechts:

#18: $\lim_{x\to 2+} f(x)$

#19: $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} x$

#20: $\lim_{x\to 2+} x = 2$

#21: Von links ist der Grenzwert der Funktionswerte 1.

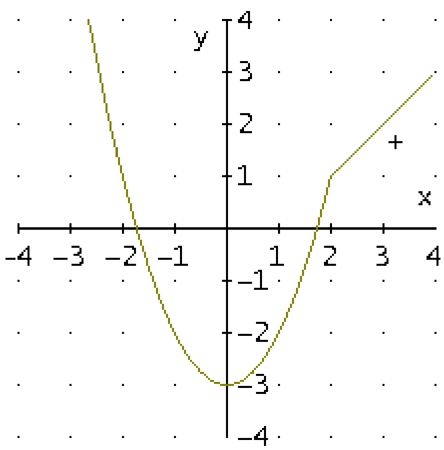
#22: Von rechts ist der Grenzwert der Funktionswerte 2.

#23: Also ist die Funktion bei x=2 unstetig.

#24: ---

#25: Fall 2: Knick im Graphen, aber beim Knick gleicher Funktionswert:

#26:
```
g(x) :=
  If x ≤ 2
     x^2 - 3
     x - 1
```



#27: g ist für x=2 definiert, d.h. es gibt einen Funktionswert:

#28: $g(2) = 1$

#29: Ich betrachte den Grenzwert der Funktionswerte für x-Werte von links:

#30: $\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3)$

#31: $\lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = \left(\lim_{x \to 2-} x\right)^2 - 3$

#32: $\lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = 4 - 3$

#33: $\lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = 1$

#34: Ich betrachte den Grenzwert der Funktionswerte für x-Werte von

rechts:

#35: $\lim_{x \to 2+} g(x)$

#36: $\lim_{x \to 2+} g(x) = \lim_{x \to 2+} (x - 1)$

#37: $\lim_{x \to 2+} (x - 1) = 1$

#38: Von links ist der Grenzwert der Funktionswerte 1.

#39: Von rechts ist der Grenzwert der Funktionswerte auch 1.

#40: Also ist die Funktion bei x=2 stetig.

#41: ---

#42: Fall 3: Loch im Graphen:

#43:
```
k(x) :=
  If x < 2
     x^2 - 3
     If x > 2
        x - 1
```

#44: Das ist die gleiche Funktion wie g, aber k ist bei x=2 nicht

definiert.

#45: k(2) = ?

#46: $\lim_{x \to 2} k(x)$

#47: 1

#48: Der Grenzwert ist 1. Aber das ist kein Funktionswert.

#49: Also ist die Funktion bei x=2 weder stetig noch unstetig, sondern einfach nicht definiert.

#50: Aber k(x) ist stetig ergänzbar:

```
       kerg(x) :=
         If x < 2
            x^2 - 3
#51:        If x > 2
               x - 1
               1
```

#52: $\lim_{x \to 2} kerg(x)$

#53: 1

#54: kerg(2) = 1

#55: Der Grenzwert ist 1 und es ist der Funktionswert für x=2.

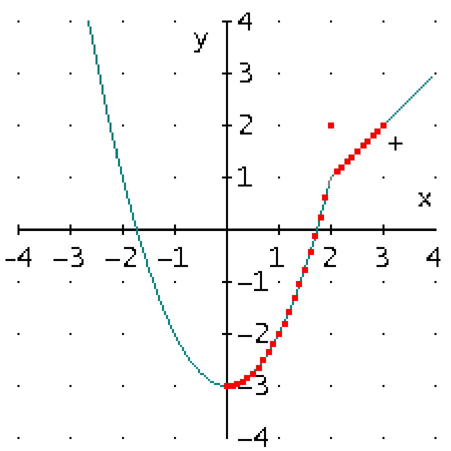
#56: Also ist kerg stetig bei x=2.

#57: ---

#58: Fall 4: One-point-jump im Graphen:

```
       j(x) :=
         If x < 2
            x^2 - 3
#59:        If x > 2
               x - 1
               2
```

#60: VECTOR([x, j(x)], x, 0, 3, 0.1)



#61: Der Grenzwert für x=2 ist wieder 1, der Funktionswert für x=2 existiert, ist aber 2.

#62: Also ist j(x) unstetig für x=2.

#63: ---

#64: Merke:

#65: Ist eine Funktion differenzierbar bei xo, dann ist sie dort auch stetig, weil es für xo einen Funktionswert gibt und die Funktion glatt und zusammenhängend ist. (Beweis später).

#66: Hat eine Funktion bei xo einen Wert und hat sie dort von links und rechts diesen Funktionswert als Grenzwert, dann ist sie dort stetig, muss aber nicht differenzierbar sein.

#67: Hat eine Funktion bei xo einen Pol, dann ist sie dort nicht definiert. Manche nennen das auch unstetig, das ist aber nicht korrekt.

#68: Hat eine Funktion bei xo ein Loch, dann ist sie dort nicht definiert. Manche nennen das auch unstetig, das ist aber nicht korrekt.

#69: Hat eine Funktion bei xo ein Loch, dann ist sie dort oft stetig ergänzbar.