#1: Die Quotientenregel

#2: ---------------------------

#3: Die Ableitung des Quotienten ist i.A. nicht der Qutient der Ableitungen

#4: $h(x) := \frac{x^3}{x^2}$

#5: Quotient der Ableitungen:

#6: $\frac{3\cdot x^2}{2\cdot x} = \frac{3\cdot x}{2}$

#7: Das kann nicht die Ableitung von h sein. Warum nicht?

#8: ---------------------------

#9: Herleitung der korrekten Ableitung:

#10: $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$

#11: Behauptung:

#12: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$

#13: Ableitung des Quotienten ist

#14: Ableitung Zähler mal Nenner minus Ableitung Nenner mal Zähler durch Nenner-Quadrat.

#15: ---------------------------

#16: Beweis:

#17: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(xo)}{x - xo}$

#18: $\frac{\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(xo)}{v(xo)}}{x - xo}$

#19: Ich mache die Brüche oben gleichnamig:

#20: $$\frac{\frac{u(x)\cdot v(xo) - u(xo)\cdot v(x)}{v(x)\cdot v(xo)}}{x - xo}$$

#21: $$\frac{v(xo)\cdot u(x) - u(xo)\cdot v(x)}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#22: Problem: Grenzwerte nicht erkennbar.

#23: Deshalb wird so umgeformt, dass die Differenzenquotienten von u und v zu erkennen sind.

#24: Trick: Es gilt:

#25: $$- u(xo)\cdot v(xo) + u(xo)\cdot v(xo) = 0$$

#26: Ich addiere im Zähler diese 0:

#27: $$\frac{v(xo)\cdot u(x) - u(xo)\cdot v(x) - u(xo)\cdot v(xo) + u(xo)\cdot v(xo)}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#28: Ich stelle so um, dass ich ausklammern kann:

#29: $$\frac{v(xo)\cdot u(x) - u(xo)\cdot v(xo) + u(xo)\cdot v(xo) - u(xo)\cdot v(x)}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#30: Ich klammere aus:

#31: $$\frac{v(xo)\cdot(u(x) - u(xo)) + u(xo)\cdot(v(xo) - v(x))}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#32: Ich klammere (–1) bei v(xo)–v(x) aus, damit die Differenz richtig steht:

#33: $$\frac{v(xo)\cdot(u(x) - u(xo)) - u(xo)\cdot(v(x) - v(xo))}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#34: Ich trenne die Terme:

#35: $$\frac{v(xo)\cdot(u(x) - u(xo))}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)} - \frac{u(xo)\cdot(v(x) - v(xo))}{(x - xo)\cdot v(xo)\cdot v(x)}$$

#36: Produkte kann man getrennt schreiben:

#37: $$\frac{v(xo)}{}\cdot\frac{u(x) - u(xo)}{} - \frac{u(xo)}{}\cdot\frac{v(x) - v(xo)}{}$$

$$\frac{}{v(xo)\cdot v(x)} \qquad \frac{}{x - xo} \qquad \frac{}{v(xo)\cdot v(x)} \qquad \frac{}{x - xo}$$

#38: Jetzt berechne ich den Grenzwert für x gegen xo:

#39: $$\lim_{x\to xo} \left(\frac{v(xo)}{v(xo)\cdot v(x)}\cdot\frac{u(x) - u(xo)}{x - xo} - \frac{u(xo)}{v(xo)\cdot v(x)}\cdot\frac{v(x) - v(xo)}{x - xo}\right)$$

#40: $$\left(\lim_{x\to xo} \frac{v(xo)}{v(xo)\cdot v(x)}\right)\cdot\lim_{x\to xo} \frac{u(x) - u(xo)}{x - xo} - \left(\lim_{x\to xo} \frac{u(xo)}{v(xo)\cdot v(x)}\right)\cdot\lim_{x\to xo} \frac{v(x) - v(xo)}{x - xo}$$

#41: Weil u und v differenzierbar sind, sind sie auch stetig.

#42: Deshalb existieren die Grenzwerte:

#43: $$\frac{v(xo)}{v(xo)\cdot v(xo)}\cdot u'(xo) - \frac{u(xo)}{v(xo)\cdot v(xo)}\cdot v'(xo)$$

#44: $$\frac{v(xo)}{v(xo)^2}\cdot u'(xo) - \frac{u(xo)}{v(xo)^2}\cdot v'(xo)$$

#45: $$\frac{v(xo)\cdot u'(xo)}{v(xo)^2} - \frac{u(xo)\cdot v'(xo)}{v(xo)^2}$$

#46: $$\frac{v(xo)\cdot u'(xo) - u(xo)\cdot v'(xo)}{v(xo)^2}$$

#47: q.e.d.

#48: ---------------------------

#49: Merke:

#50: Ableitung des Quotienten ist

#51: Ableitung Zähler mal Nenner minus Ableitung Nenner mal Zähler

durch Nenner-Quadrat.

#52: ---------------------------