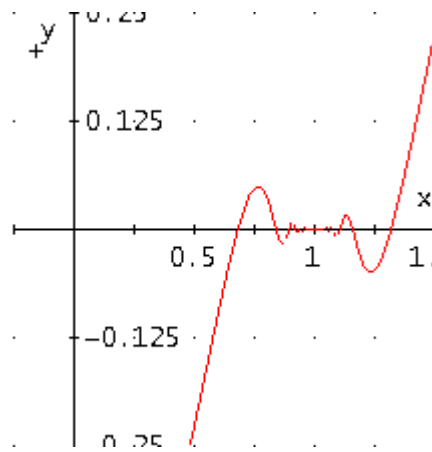


#1: Modelllösung zur Unstetigkeit einer Ableitungsfunktion

#2: Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} (x - 1)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right) & \text{If } x \neq 1 \\ 0 & \text{If } x = 1 \end{cases}$$

#3:



#4: -----

#5: a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $f(x)$.

#6: b) Zeichnen Sie die Ableitung.

#7: c) Beweisen Sie, dass die Ableitung von $f(x)$ bei $x=1$ NICHT stetig ist.

#8: -----

#9: Lsg a1: Ableitung für $x \neq 1$ (mit Derive):

$$\#10: \frac{d}{dx} \left((x - 1)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right) \right)$$

$$\#11: 2 \cdot (x - 1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x - 1}\right)$$

#12: Lsg a2: Ableitung für $x=1$:

#13: Der Sekantensteigung für $x_0=1$ und $h \neq 0$ ist:

$$\#14: \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

#15: Wegen $f(1)=0$ ist das:

$$\#16: \frac{f(1 + h) - 0}{h}$$

h

#17: Das ist nach Definition von f(x):

$$\#18: \frac{(1 + h - 1)^2 \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{1 + h - 1}\right)}{h}$$

#19: Die Einsen heben sich weg:

$$\#20: \frac{h^2 \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$$

#21: Weil $h \neq 0$ kann ich kürzen:

$$\#22: h \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{h}\right)$$

#23: $\sin(1/h)$ ist durch 1 und -1 beschränkt. Wenn h gegen null geht, muss deshalb auch $h \cdot \sin(1/h)$ gegen null gehen.

#24: Der Grenzwert der Sekantensteigungen für h gegen 0 ist also:

$$\#25: \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

#26: Die Ableitung von f bei $x=1$ ist also 0.

#27: Die gesamte Ableitungsfunktion von f ist deshalb zusammengesetzt aus #11 und #25:

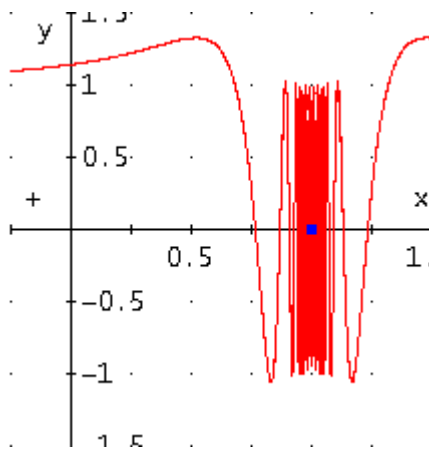
$$\#28: \begin{array}{l} f_-(x) := \\ \text{If } x \neq 1 \\ 2 \cdot (x - 1) \cdot \text{SIN}(1/(x - 1)) - \text{COS}(1/(x - 1)) \\ 0 \end{array}$$

#29: -----

#30: Lsg b) Zeichnung der Ableitung

#31: VECTOR([x, f_-(x)], x, -0.25, 1.5, 0.001)

#32: [1, f_-(1)]



#33: -----

#34: Lsg c) Unstetigkeit der Ableitung f_-' bei $x=1$

#35: Ich zeige, dass es eine Folge $x_n \rightarrow 1$ gibt, deren Funktionswerte $f_-(x_n)$ nicht gegen $f_-(1)$ laufen.

#36: ---- Vorüberlegung ----

#37:
$$2 \cdot (x - 1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x - 1}\right)$$

#38: Im $f_-(x)$ -Term geht der Term $2(x-1) \cdot \sin(\dots)$ gegen null, wenn x gegen 1 läuft.

#39: Wenn ich also den \cos -Term konstant halte, geht das Ganze gegen eine Konstante. Deshalb:

#40:
$$\cos\left(\frac{1}{x - 1}\right) = 1$$

#41: Das gilt z.B., wenn

#42:
$$\frac{1}{x - 1} = 2 \cdot n \cdot \pi$$

#43: Also wenn

#44:
$$x = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} + 1$$

#45: Die Vorüberlegung gehört nicht zum Beweis und braucht in einer Klausur nicht angegeben zu werden.

#46: Ich stelle sie hier nur aus didaktischen Gründen dar.

#47: Wie man auf die richtige Folge gekommen ist, interessiert im Beweis nicht.

#48: Hauptsache ist, dass der Beweis damit funktioniert.

#49: ----- Ende der Vorüberlegung -----

#50: ----- Beginn des Beweises der Unstetigkeit von $f_-(x)$ bei $x=1$ -----

#51: Es sei die Folge x_n mit n aus \mathbb{N} wie folgt definiert:

#52: $n \in \text{Integer } [1, \infty)$

#53:
$$x_n := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} + 1$$

#54: Dann gilt:

#55:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

#56: weil der Bruch gegen null geht.

#57: Weil x_n stets ungleich 1 ist, ist $f_-(x_n)$ nicht 0, sondern:

#58:
$$f_-(x_n) = 2 \cdot (x_n - 1) \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{x_n - 1}\right) - \text{COS}\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$$

#59:
$$f_-(x_n) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} + 1 - 1\right) \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} + 1 - 1}\right) -$$

$$\text{COS}\left(\frac{1}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} + 1 - 1}\right)$$

#60:
$$f_-(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \text{SIN}\left(\frac{1}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n}}\right) - \text{COS}\left(\frac{1}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n}}\right)$$

#61:
$$f_-(x_n) = \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \pi \cdot n) - \text{COS}(2 \cdot \pi \cdot n)$$

#62: Es gilt: $\text{SIN}(2 \cdot \pi \cdot n) = 0$ und $\text{COS}(2 \cdot \pi \cdot n) = 1$. Also gilt:

#63:
$$f_-(x_n) = \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot 0 - 1$$

$$\pi \cdot n$$

#64: $f_{\pi}(x_n) = -1$

#65: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\pi}(x_n) = -1$

#66: Damit ist gezeigt, dass es eine Folge x_n gibt, die gegen 1 läuft, dass aber deren Funktionswerte $f_{\pi}(x_n)$ nicht gegen $f_{\pi}(1)=0$ laufen, sondern gegen -1 .

#67: D.h., dass $f_{\pi}(x)$ bei $x=1$ unstetig ist! q.e.d.

#68: -----

#69: -----

#70: Achtung! Glauben Sie DERIVE nicht alles.

#71: Wenn man Derive einfach rechnen lässt ergibt sich z.B.:

#72:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \pi \cdot n) - \text{COS}(2 \cdot \pi \cdot n) \right) = \text{SIN}(\infty)$$

#73: Einzelberechnung ergibt:

#74:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \pi \cdot n) = 0$$

#75:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{COS}(2 \cdot \pi \cdot n) = \text{SIN}(\infty)$$

#76: Obwohl die Werte bekannt sind:

#77: $\text{VECTOR}(\text{COS}(2 \cdot \pi \cdot n), n, 1, 10, 1) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

#78: Wieso dieser Fehler auftritt, weiß ich nicht.

#79: -----

#80: Übungsaufgabe:

#81:
$$g(x) := \begin{cases} (x + 1)^2 \cdot \text{SIN}(1/(x + 1)) & \text{If } x \neq -1 \\ 0 & \text{If } x = -1 \end{cases}$$

#82: a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von g .

#83: b) Zeichnen Sie die Ableitung.

#84: c) Beweisen Sie, dass die Ableitung von g bei $x=1$ NICHT stetig ist.

#85: -----

