#1: Taylor-Entwicklung von Funktionen

#2: --------------------------------

#3: Beobachtung:

#4: Jede -glatte-, d.h. differenzierbare Funktion kann man sich

#5: zumindest stückweise, d.h. in einem Intervall,

#6: als Teil eines Polynoms denken, wenn man das Polynom hinbiegt.

#7: Beispiel: sin(x) fängt an wie x, krümmt sich herunter wie x^3

#8: und wieder hoch wie x^5 und wieder runter wie x^7.

#9: $G(x) :\!= \mathrm{SIN}(x)$

#10: $$F(x) :\!= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

#11: Plotten Sie beide Funktionen und Sie sehen es!

#12: --------------------------------

#13: Wie kommt das? Es geht offensichtlich, aber woher kommen die Zahlen?

#14: Es sei S(x)=sin(x), S1(x)=sin'(x)=cos(x), S2(x)=sin''(x)=cos'(x)=-sin(x) usw.

#15: Wir vermuten, daß sin(x) eine Potenzfunktion vom Grade 7 ist. Dann muss gelten:

#16: $$S(x) :\!= a0 + a1\cdot x + a2\cdot x^2 + a3\cdot x^3 + a4\cdot x^4 + a5\cdot x^5 + a6\cdot x^6 + a7\cdot x^7$$

#17: $$S1(x) :\!= 0 + 1\cdot a1 + 2\cdot a2\cdot x + 3\cdot a3\cdot x^2 + 4\cdot a4\cdot x^3 + 5\cdot a5\cdot x^4 + 6\cdot a6\cdot x^5 + 7\cdot a7\cdot x^6$$

#18: $$S2(x) :\!= 0 + 0 + 2\cdot a2 + 3\cdot 2\cdot a3\cdot x^1 + 4\cdot 3\cdot a4\cdot x^2 + 5\cdot 4\cdot a5\cdot x^3 + 6\cdot 5\cdot a6\cdot x^4 + 7\cdot 6\cdot a7\cdot x^5$$

#19: $$S3(x) :\!= 0 + 0 + 0 + 3\cdot 2\cdot 1\cdot a3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a4\cdot x^1 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot a5\cdot x^2 +$$

3 4

$6\cdot5\cdot4\cdot a6\cdot x + 7\cdot6\cdot5\cdot a7\cdot x$

#20: $S4(x) := 0 + 0 + 0 + 0 + 4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a4 + 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot a5\cdot x^1 + 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot a6\cdot x^2 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot a7\cdot x^3$

#21: $S5(x) := 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a5 + 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot a6\cdot x^1 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot a7\cdot x^2$

#22: $S6(x) := 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a6 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot a7\cdot x^1$

#23: $S7(x) := 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a7$

#24: Nun gilt aber:

#25: S(0)=a0 , weil x^n überall 0 für x=0 wird.

#26: Wenn S(x)=sin(x) sein soll, muβ gelten S(0)=a0=sin(0)=0!

#27: S1(0)=1*a1 ! Da S1(0)=sin'(0)=cos(0)=1 folgt a1=1 !

#28: S2(0)=2*1*a2 ! Da S2(0)=sin''(0)=-sin(0) folgt a2=0!

#29: S3(0)=3*2*1*a3 ! Da S3(0)=sin'''(0)=-cos(0)=-1 folgt a3=-1/(3*2*1) !

#30: ---------------

#31: Zeigen Sie: a4=0; a5=1/(5!) ; a6=0 ; a7=-1/(7!) .

#32: ---------------

#33: Insgesamt ergibt sich näherungsweise, dass

#34: sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! ist.

#35: Was heiβt näherungsweise? In der Nähe des Entwicklungspunktes x=0!

#36: Probe:

#37: PrecisionDigits := 20

#38: $\mathrm{SinTay}(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

#39: $\mathrm{SinTay}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.00015689860050127740453$

#40: $\mathrm{SinTay}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{3}\right) = - 4.1321280659831201417 \cdot 10^{-6}$

#41: $\mathrm{SinTay}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right) = - 3.1161136945358291257 \cdot 10^{-7}$

#42: $\mathrm{SinTay}\left(\frac{\pi}{5}\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{5}\right) = - 4.1908128797306619542 \cdot 10^{-8}$

#43: $\mathrm{SinTay}\left(\frac{\pi}{100}\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{100}\right) = - 8.2097810657218825423 \cdot 10^{-20}$

#44: Je näher man an x=0 herankommt, desto geringer die Abweichung.

#45: Das ist natürlich kein Beweis.

#46: Zu zeigen wäre, dass die Reihe für jedes x gegen sin(x) konvergiert.

#47: $\mathrm{SIN}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!}$

#48: Der Beweis ist aufwendig! Siehe Analysisbuch von Danckwerts, S. 141 ff

#49: --------------------------------