

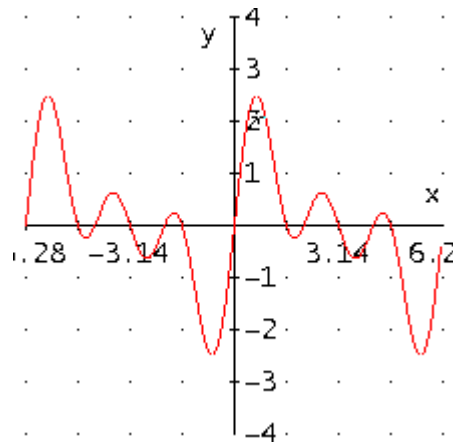
#1: Fourierreihen – Basics –

#2: -----

#3: Wir betrachten zunächst die Überlagerung von Schwingungen

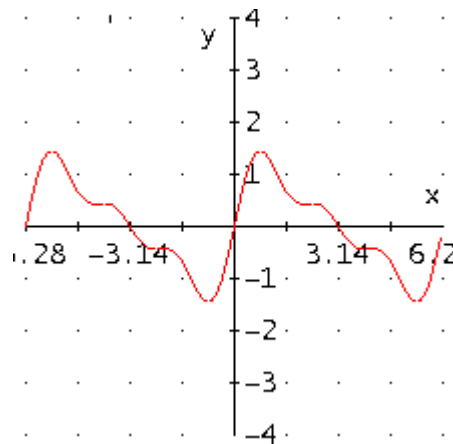
#4: Ein Ton ist Grundton plus Obertöne. Obertöne haben
n-fache-Frequenz:

#5: $f_1(x) := \sin(x) + \sin(2 \cdot x) + \sin(3 \cdot x)$



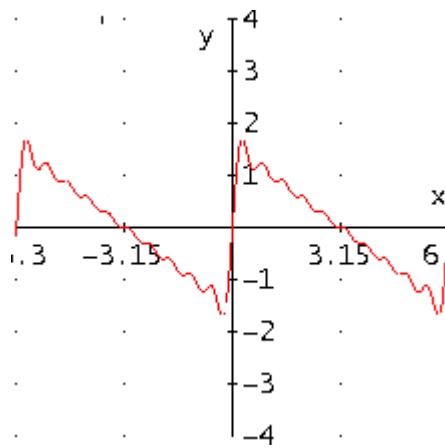
#6: Die Obertöne sind aber leiser, d.h. die Amplitude ist kleiner:

#7: $f_2(x) := \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x)$

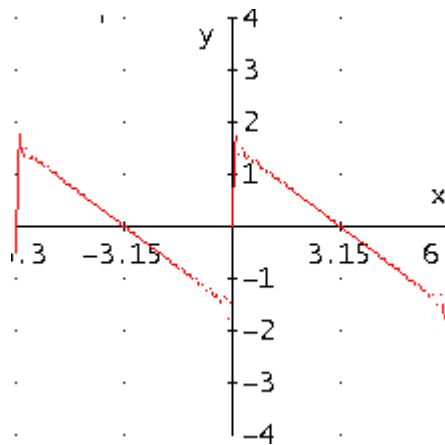


#8: Die Fortsetzung ist im Prinzip unendlich:

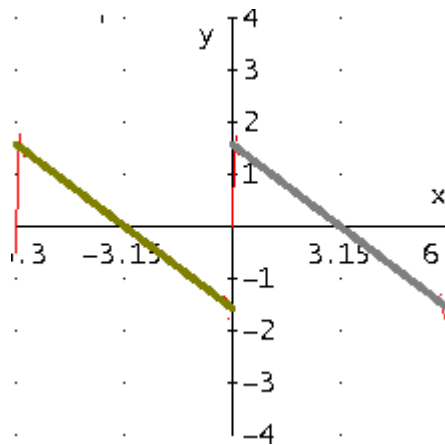
#9: $f_3(x) := \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x)$



#10: $f_5(x) := \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} \cdot \text{SIN}(n \cdot x)$



#11: Man sieht, dass der Graph sich einer Grenzfunktion nähert:



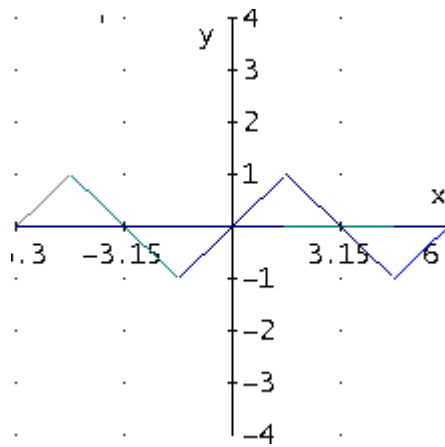
#12: Die Grundidee von Fourier ist die Umkehrung der Frage:

#13: Nicht: Welches ist die Grenzfunktion der Reihe? Sondern:

#14: Gegeben ist eine Grenzfunktion aus periodischen Graphenstücken.

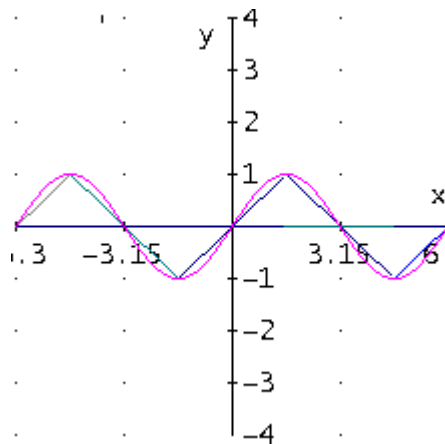
Mit welcher Reihe kann ich die annähern?

#15: Beispiel: Es sei eine Dreieckskurve gegeben:



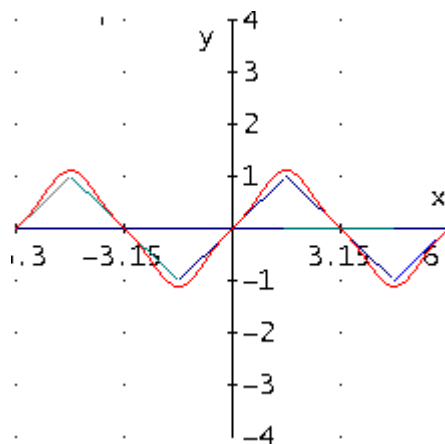
#16: Es ist klar, dass das in etwa eine Sinus-Kurve ist.

#17: $f_6(x) := \text{SIN}(x)$



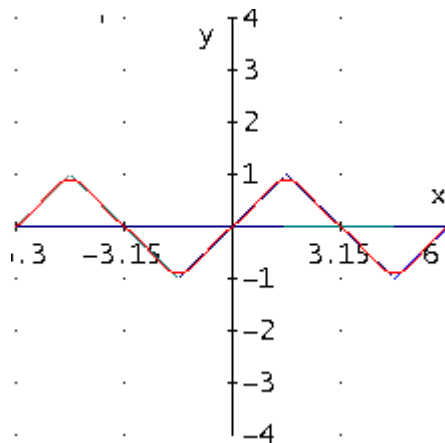
#18: f_6 muss eckiger werden, aber die HP, TP und die NSt müssen erhalten bleiben:

#19: $f_7(x) := \text{SIN}(x) - \frac{\text{SIN}(3 \cdot x)}{3}$



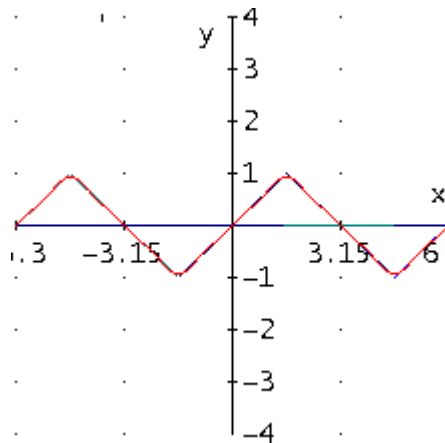
#20: Das ist zu hoch, also Faktor davor

$$\#21: f_8(x) := \frac{8}{\pi} \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} \right)$$



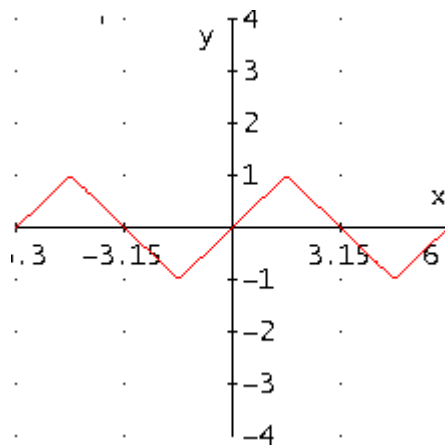
#22: Passt schon besser. Noch einen Oberton dazu:

$$\#23: f_9(x) := \frac{8}{\pi} \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot x)}{5} \right)$$



#24: Passt schon fast genau. Fortsetzung führt zu:

$$\#25: f_9(x) := \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot x)}{(2 \cdot n - 1)^2}$$



#26: Endgültige Form:

$$\#27: f_{\text{Lsg}}(x) := \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \text{SIN}((2 \cdot n - 1) \cdot x)}{(2 \cdot n - 1)^2}$$

#28: -----

#29: Die allgemeine Form der Fourier-Reihe ist

$$\#30: a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \cdot \text{COS}(n \cdot x) + \frac{b_n}{n} \cdot \text{SIN}(n \cdot x) \right)$$

#31: In der Uni wird hergeleitet, wie man auf die Zahlen a_0 , a_n , b_n und n kommt.

#32: Hier wollte ich nur erklären was eine Fourier-Reihe ist, nicht wie man sie bestimmt.

#33: -----

#34: Merke:

#35: Taylor-Reihen bestehen im Prinzip aus einer unendlichen Summe von Potenzfunktionen.

#36: Mit Taylor-Reihen kann man jede andere Funktion näherungsweise darstellen, wenn die andere Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

#37: Beispiel:

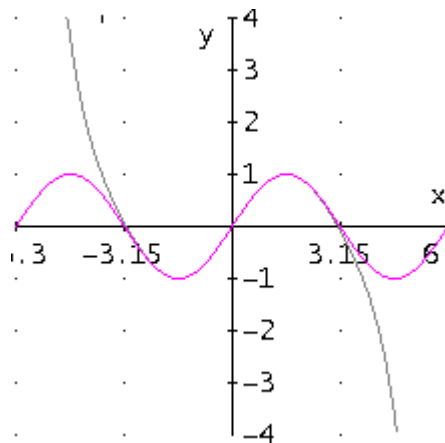
$$\#38: \text{SIN}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2 \cdot n - 1}}{(2 \cdot n - 1)!}$$

$$n=1 \quad (2 \cdot n - 1)!$$

#39: In der Praxis genügt:

$$\#40: \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\#41: x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$



#42: -----

#43: Merke:

#44: Fourier-Reihen sind im Prinzip unendliche Summen von Cosinus- und/oder Sinusfunktionen verschiedener Frequenz.

#45: Mit Fourier-Reihen kann man fast jede Funktion annähern, die irgendwie periodisch ist.

#46: Die anzunähernde Funktion muss NICHT überall differenzierbar sein, aber periodisch und in den periodischen Abschnitten stetig.

#47: Die anzunähernde Funktion darf also Sprünge und Spitzen haben.

#48: Beispiel: Siehe oben.

#49: -----

#50: Literatur: Mathematik-Ratgeber, gekürzte Ausgabe der Kleinen Enzyklopädie der Mathematik, 1974, Verlag Harri Deutsch, Zürich, Lizenzausgabe aus der DDR

#51: Empfehle dringend, sich das Buch zu besorgen. Ich schlage darin

immer zuerst nach, wenn ich etwas suche.

#52: -----