

#1: Ableitung von Kurven im Raum, Ableitungsvektor

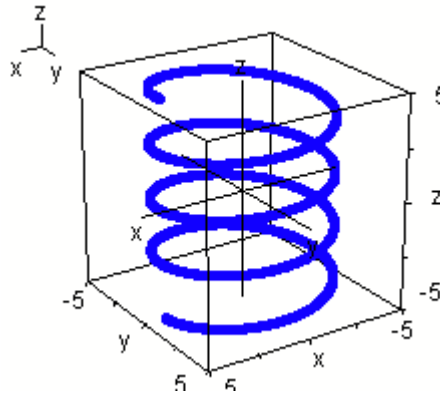
#2: InputMode := Word

#3: -----

#4: Beispiel:

#5: $\text{kurve}(t) := \left[4 \cdot \cos(t), 4 \cdot \sin(t), \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t \right]$

#6: $\text{VECTOR}([\text{kurve}(t)], t, -4 \cdot \pi, 4 \cdot \pi, 1^\circ)$



#7: -----

#8: Wir wollen die Kurve bei t_0 ableiten und bilden dazu den Differenzenquotienten:

#9: $\text{DiffQuo}(t_0) := \frac{\text{kurve}(t) - \text{kurve}(t_0)}{t - t_0}$

#10: $\text{DiffQuo}(t_0) :=$

$$\frac{\left[4 \cdot \cos(t), 4 \cdot \sin(t), \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t \right] - \left[4 \cdot \cos(t_0), 4 \cdot \sin(t_0), \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t_0 \right]}{t - t_0}$$

~
~
~

]

#11: Die Differenz von Vektoren bildet man komponentenweise:

#12:

DiffQuo(to) :=

$$\left[\frac{4 \cdot \cos(t) - 4 \cdot \cos(t_0), 4 \cdot \sin(t) - 4 \cdot \sin(t_0), \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t - \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t_0}{t - t_0} \right]$$

#13: Man teilt einen Vektor durch eine Zahl, indem man jede Komponente teilt:

#14:

DiffQuo(to) :=

$$\left[\frac{4 \cdot \cos(t) - 4 \cdot \cos(t_0), 4 \cdot \sin(t) - 4 \cdot \sin(t_0), \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t - \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t_0}{t - t_0} \right]$$

#15:

$$\text{DiffQuo}(t_0) := \left[\frac{4 \cdot \cos(t) - 4 \cdot \cos(t_0)}{t - t_0}, \frac{4 \cdot \sin(t) - 4 \cdot \sin(t_0)}{t - t_0}, \frac{\frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t - \frac{5}{4 \cdot \pi} \cdot t_0}{t - t_0} \right]$$

#16: Was wird wohl der Grenzwert sein, wenn t gegen to läuft?

#17: $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{DiffQuo}(t_0) = \left[-4 \cdot \sin(t_0), 4 \cdot \cos(t_0), \frac{5}{4 \cdot \pi} \right]$

#18: D.h., dass die Ableitung bei t_0 aus einem Vektor von drei Ableitungen besteht.

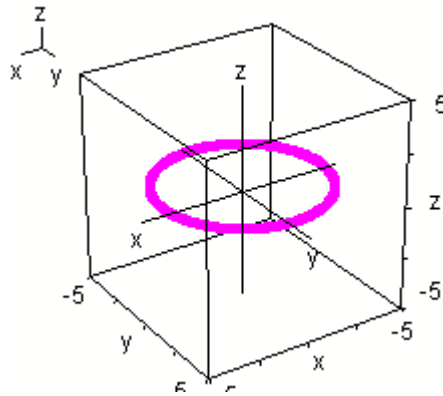
#19: -----

#20: Die Ableitungsfunktion der Kurve

#21: Die Ableitungsfunktion ordnet jedem t_0 die Ableitung der Kurve bei t_0 zu. Also:

$$\#22: \text{kurveAb11}(t) := \left[-4 \cdot \sin(t), 4 \cdot \cos(t), \frac{5}{4 \cdot \pi} \right]$$

#23: VECTOR([kurveAb11(t)], t, -4·π, 4·π, 1°)



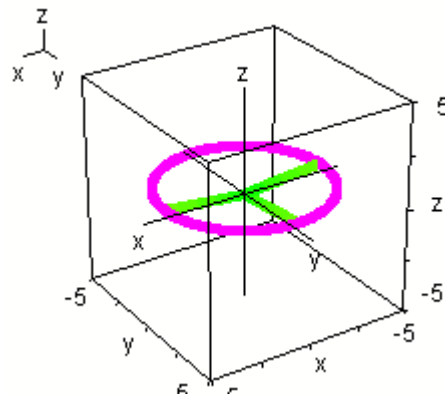
#24: Dies ist die Menge der Spitzenpunkte der Vektoren. Als Vektoren gezeichnet gehen sie vom Ursprung aus:

$$\#25: \text{Ab1vek}(t, \lambda) := [0, 0, 0] + \lambda \cdot \text{kurveAb11}(t)$$

$$\#26: \text{VECTOR}\left(\left[\text{Ab1vek}\left(-\frac{\pi}{2}, \lambda\right)\right], \lambda, 0, 1, 0.01\right)$$

$$\#27: \text{VECTOR}([\text{Ab1vek}(0, \lambda)], \lambda, 0, 1, 0.01)$$

$$\#28: \text{VECTOR}\left(\left[\text{Ab1vek}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)\right], \lambda, 0, 1, 0.01\right)$$



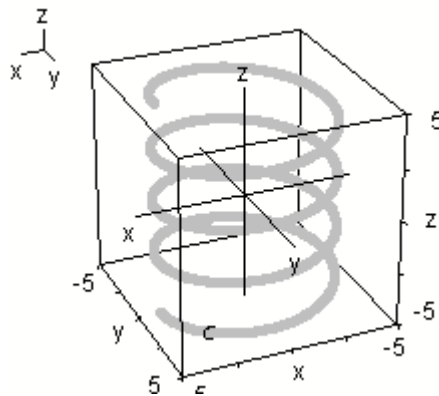
#29: -----

#30: Deutung der Einzel-Ableitung bei t_0

#31: Wir betrachten die Kurve in einem einzelnen Punkt.

#32: $t_1 := -4 \cdot \pi + \frac{\pi}{4}$

#33: $\text{kurve}(t_1) = \left[2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2}, -\frac{75}{16} \right]$



#34: Die Ableitung bei t_1 ist:

#35: $\text{kurveAb11}(t_1) = \left[-2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2}, \frac{5}{4 \cdot \pi} \right]$

#36: Diesen Vektor will ich beim Punkt $\text{kurve}(t_1)$ einzeichnen.

#37: Der Anfangspunkt ist $\text{kurve}(t_1)$.

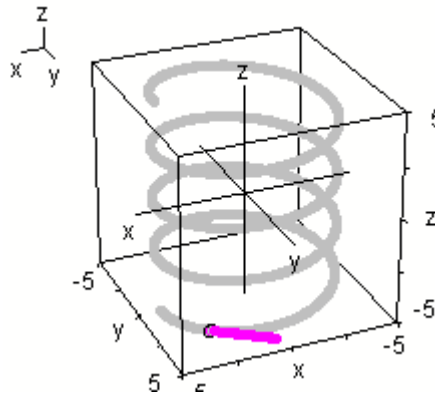
#38: Der Endpunkt ist $(\text{kurve}(t_1) + \text{kurveAb11}(t_1))$.

#39: $[\text{kurve}(t_1), \text{kurve}(t_1) + \text{kurveAb11}(t_1)]$

#40: Zeichnung als Liniestück:

#41: $t\text{vek}(t, \lambda) := \text{kurve}(t) + \lambda \cdot \text{kurveAb11}(t)$

#42: VECTOR([tvek(t1, λ)], λ, 0, 1, 0.01)



#43: -----

#44: Ich zeichne noch drei weitere Tangentialvektoren:

#45: $t2 := -4 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{4}$

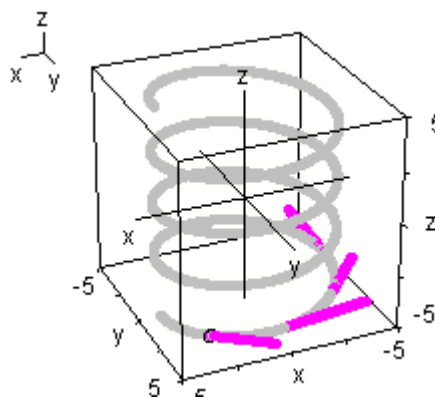
#46: $t3 := -4 \cdot \pi + \frac{3 \cdot \pi}{4}$

#47: $t4 := -4 \cdot \pi + \frac{4 \cdot \pi}{4}$

#48: VECTOR([tvek(t2, λ)], λ, 0, 1, 0.01)

#49: VECTOR([tvek(t3, λ)], λ, 0, 1, 0.01)

#50: VECTOR([tvek(t4, λ)], λ, 0, 1, 0.01)

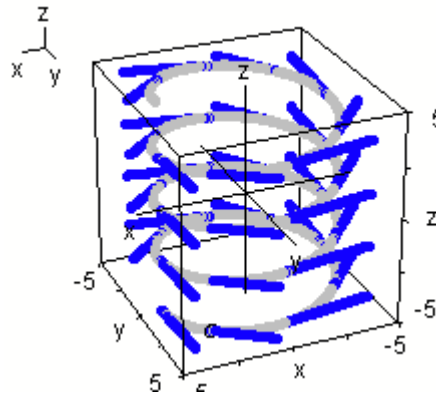


#51: -----

#52: Ich verallgemeinere das und zeichne alle Tangentialvektoren im Abstand von $\pi/4$.

#53: $\text{tn}(n) := -4 \cdot \pi + n \cdot \frac{\pi}{4}$

#54: `VECTOR(VECTOR([tvek(tn(n), λ)], λ, 0, 1, 0.01), n, 0, 32, 1)`



#55: -----