#1: Intergration: Anleitung zur Flächenmessung durch Summation mit Zahlenbeispielen

#2: --

#3: Gegeben ist:

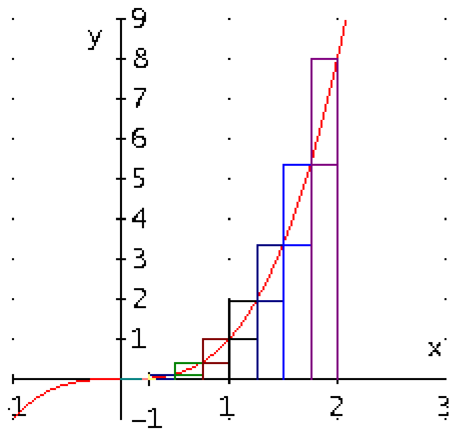
#4: $f(x) := x^3$

#5: Gesucht ist:

#6: $\int_0^{xo} f(x)\, dx$

#7: --

#8: Ich teile das Intervall [0,xo] in n Streifen ein:



#9: Hier ist das Intervall [0;2] in acht Streifen eingeteilt, die Streifenbreite ist also Δx = 2/8 = 1/4.

#10: Das Oberrechteck Nr. 8 hat Fläche: (1/4)*f(2) oder (2/8)*f(8*(2/8)).

#11: Das Oberrechteck Nr. 7 hat Fläche: (1/4)*f(1.75) oder (2/8)*f(7*(2/8)). Usw:

#12: $$\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{8}\cdot f\left(k\cdot\frac{2}{8}\right)$$

#13: $$\frac{2}{8}\cdot\sum_{k=1}^{8} f\left(k\cdot\frac{2}{8}\right)$$

#14: --

#15: Allgemein für n Streifen im Intervall [0,xo] ist die Obersumme also:

#16: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$$

#17: --

#18: Das Unterrechteck Nr. 8 hat Fläche: (1/4)*f(1.75) oder (2/8)*f(7*(2/8)).

#19: Das Unterrechteck Nr. 7 hat Fläche: (1/4)*f(1.5) oder (2/8)*f(6*(2/8)). Usw:

#20: $$\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{8} \cdot f\left((k - 1) \cdot \frac{2}{8}\right)$$

#21: $$\frac{2}{8} \cdot \sum_{k=1}^{8} f\left((k - 1) \cdot \frac{2}{8}\right)$$

#22: Wenn ich k von 0 bis 7 zählen lasse, ergibt sich das Gleiche:

#23: $$\frac{2}{8} \cdot \sum_{k=0}^{7} f\left(k \cdot \frac{2}{8}\right)$$

#24: --

#25: Allgemein für n Streifen im Intervall [0,xo] ist die Untersumme also:

#26: $$U(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$$

#27: --

#28: Beispiele für xo = 2 bei 8 Streifen:

#29: $$O(8) = \frac{81 \cdot xo^4}{256} = \frac{81 \cdot 2^4}{256} = \frac{81}{16}$$

#30: $$U(8) = \frac{49 \cdot xo^4}{256} = \frac{49 \cdot 2^4}{256} = \frac{49}{16}$$

#31: --

#32: --

#33: Wir haben also allgemein bei f(x)=x^3 für n Streifen im Intervall [0,xo] ist die Summen:

#34: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$$

#35: $$U(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$$

#36: Wir prüfen, ob Ober- und Untersumme den gleichen Grenzwert haben.

#37: Wenn ja, dann muss die Differenz gegen null gehen, wenn die Anzahl der Streifen gegen unendlich geht.

#38: $$O(n) - U(n) = \frac{xo^4}{n}$$

#39: $$\lim_{n \to \infty} \frac{xo^4}{n} = 0$$

#40: Da die Differenz gegen null geht, muss der Flächeninhalt der Grenzwert der Obersumme oder der Untersumme sein.

#41: --

#42: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)^3$$

#43: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 \cdot \frac{xo^3}{n^3}$$

#44: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \frac{xo^3}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3$$

#45: $$O(n) := \frac{xo^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3$$

#46: Für die Summe der ersten Kubikzahlen kennt Derive eine Formel:

#47: $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

#48: Also gilt für O(n):

#49: $$O(n) := \frac{xo^4}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

#50: $$O(n) := \frac{xo^4\cdot(n+1)^2}{4\cdot n^2}$$

#51: $$O(n) := \frac{x0^4\cdot n + x0^4 + x0^4\cdot n^2 + x0^4\cdot n}{4\cdot n^2}$$

#52: $$O(n) := \frac{n^2\cdot xo^4 + 2\cdot n\cdot xo^4 + xo^4}{4\cdot n^2}$$

#53: $$O(n) := \frac{xo^4}{4} + \frac{xo^4}{2\cdot n} + \frac{xo^4}{4\cdot n^2}$$

#54: Nun ist Grenzwert klar:

#55: $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{xo^4}{4} + \frac{xo^4}{2\cdot n} + \frac{xo^4}{4\cdot n^2}\right) = \frac{xo^4}{4}$$

#56: Also gilt für die Fläche unter f(x)=x^3 im Intervall [0,xo] :

#57: $$\int_0^{xo} f(x)\,dx = \frac{xo^4}{4}$$

#58: Für xo=3 ergibt sich z.B.:

$$3 \qquad 3^4$$

#59: $\int_{0} f(x)\, dx = \frac{}{4} = 20.25$

#60: --

#61: --