#1: Intergration: Flächenmessung durch Summation pur

#2: --

#3: Gegeben ist:

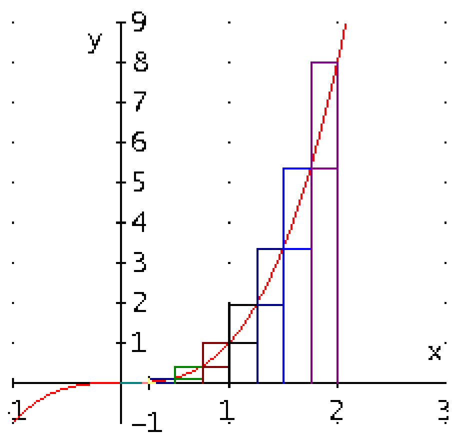
#4: $f(x) := x^3$

#5: Gesucht ist:

#6: $\int_0^{xo} f(x)\, dx$

#7: --

#8: Ich teile das Intervall [0,xo] in n Streifen ein:



#9: --

#10: Für n Streifen der Breite xo/n im Intervall [0,xo] ist die Obersumme:

#11: $O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$

#12: Für die gleichen Streifen im Intervall [0,xo] ist die Untersumme:

#13: $U(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)$

#14: --

#15: Wir prüfen, ob Ober- und Untersumme den gleichen Grenzwert haben.

#16: Wenn ja, dann muss die Differenz gegen null gehen, wenn die Anzahl der Streifen gegen unendlich geht.

#17: $$O(n) - U(n) = \frac{xo^4}{n}$$

#18: $$\lim_{n\to\infty} \frac{xo^4}{n} = 0$$

#19: Da die Differenz gegen null geht, muss der Flächeninhalt der Grenzwert der Obersumme oder der Untersumme sein.

#20: --

#21: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{xo}{n}\right)^3$$

#22: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 \cdot \frac{xo^3}{n^3}$$

#23: $$O(n) := \frac{xo}{n} \cdot \frac{xo^3}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3$$

#24: $$O(n) := \frac{xo^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3$$

#25: Für die Summe der ersten Kubikzahlen kennt Derive eine Formel:

#26: $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$$

#27: Also gilt für O(n):

#28: $$O(n) := \frac{xo^4}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$$

#29: $$O(n) := \frac{xo^4 \cdot (n + 1)^2}{4 \cdot n^2}$$

#30: $O(n) := \dfrac{x0^4 \cdot n + x0^4 + x0^4 \cdot n^2 + x0^4 \cdot n}{4 \cdot n^2}$

#31: $O(n) := \dfrac{n^2 \cdot xo^4 + 2 \cdot n \cdot xo^4 + xo^4}{4 \cdot n^2}$

#32: $O(n) := \dfrac{xo^4}{4} + \dfrac{xo^4}{2 \cdot n} + \dfrac{xo^4}{4 \cdot n^2}$

#33: Nun ist Grenzwert klar:

#34: $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{xo^4}{4} + \dfrac{xo^4}{2 \cdot n} + \dfrac{xo^4}{4 \cdot n^2} \right) = \dfrac{xo^4}{4}$

#35: Also gilt für die Fläche unter f(x)=x^3 im Intervall [0,xo] :

#36: $\int_0^{xo} f(x)\, dx = \dfrac{xo^4}{4}$

#37: --

#38: Für die Untersumme ergibt sich auf dem gleichen Wege dasselbe.

#39: --

#40: Die Flächenmessfunktion (Integralfunktion) für f(x)=x^3 ab x=0 ist also:

#41: $\Phi(xo) := \dfrac{xo^4}{4}$

#42: $\Phi(x) := \dfrac{x^4}{4}$

#43: Das ist offensichtlich eine Stammfunktion von f.

#44: --