#1: Intergralrechnung II: Integration am einfachsten Beispiel

#2: --

#3: CaseMode := Sensitive

#4: InputMode := Word

#5: --

#6: Die Umkehrung von Differentation und Integration am Beispiel

#7: Gegeben sei:

#8: $f(x) = x^2$

#9: Differenzieren bedeutet: Grenzwert der Sekantensteigungen bestimmen.

#10: $\lim_{x \to xo} \dfrac{f(x) - f(xo)}{x - xo} = \lim_{x \to xo} \dfrac{x^2 - xo^2}{x - xo} = 2 \cdot xo$

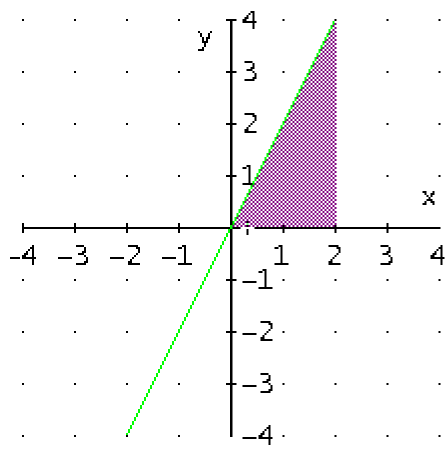
#11: f_(x) := $2 \cdot x$

#12: Da man, grob gesprochen, x^2 durch x teilt, ist nicht verwunderlich, dass die Ableitung eine Potenz weniger hat.

#13: -----------------

#14: Integrieren bedeutet: Fläche unter der Randfunktion bestimmen.

#15: AreaUnderCurve(2·x, x, 0, 2)



#16: Die Fläche unter der Randfunktion y=2x von 0 bis 2 hat offensichtlich das Maß:

$2 \cdot f(2)$ $2 \cdot (2 \cdot 2)$

#17: $\frac{\qquad}{2} = \frac{\qquad}{2} = 4$

#18: Die Fläche unter der Randfunktion y=2x von 0 bis xo hat

offensichtlich das Maß:

#19: $\frac{xo \cdot f(xo)}{2} = \frac{xo \cdot (2 \cdot xo)}{2} = xo^2$

#20: $I(x) := x^2$

#21: Da man, grob gesprochen, 2x mit x multipliziert, ist nicht

verwunderlich, dass die Integralfunktion eine Potenz höher ist.

#22: I(x) heißt Integralfunktion, oder auch Flächenmessfunktion, weil

sie Fläche unter der Randfunktion misst.

#23: Die Fläche unter y=2x von 0 bis 3 ist also I(3) = 3^2 = 9 FE groß.

#24: Die Integralfunktion ist offensichtlich eine Stammfunktion von 2x,

denn die Ableitung von x^2 ist 2x.

#25: ----------------------------------

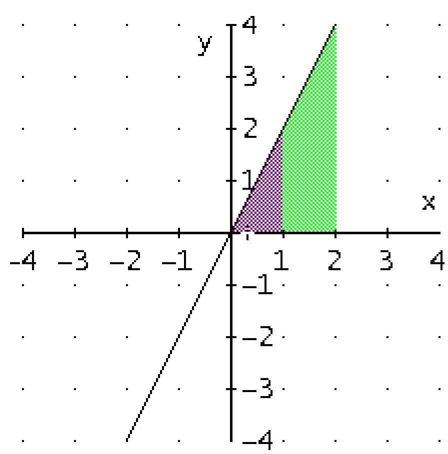
#26: Auf dem Weg zum bestimmten Integral

#27: Wenn wir die Fläche unter y=2x von x=1 bis x=2 berechnen wollen,

dann bietet sich an:

#28: (Fläche von 0 bis 2) minus (Fläche von 0 bis 1)

#29: AreaUnderCurve(2·x, x, 1, 2)



#30: $I(2) - I(1) = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

#31: Mit dem Integralzeichen schreibt man das so:

#32: $\int_1^2 2\cdot x\ dx = I(2) - I(1) = 3$

#33: ---

#34: Integralfunktion und Stammfunktion

#35: I(x) = x^2 ist offensichtlich eine Stammfunktion von y=2x.

#36: Aber F(x) = x^2 +7 ist auch eine Stammfunktion von f(x) = 2x.

#37: Allgemein ist F(x) = I(x) + c eine Stammfunktion von f(x), wenn I(x) eine war.

#38: Damit ergibt sich eine allgemeinere Berechnungsformel für unser Integral:

#39: $\int_1^2 2\cdot x\ dx = F(2) - F(1) = (I(2) + c) - (I(1) + c) = I(2) - I(1) = 3$

#40: Also gilt:

#41: $\int_1^2 2\cdot x\ dx = F(2) - F(1)$

#42: Jede beliebige Stammfunktion F(x) hätte also das gleiche Ergebnis gebracht wie die Berechnung mit I(x), weil sich c weghebt.

#43: Wir haben hier am Beispiel demonstriert, nicht bewiesen, was allgemein gilt:

#44: ---

#45: $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$

#46: Das (bestimmte) Integral über f(x) wird berechnet als Stammfunktion von oberer Grenze minus Stammfunktion von unterer Grenze.

#47: ---

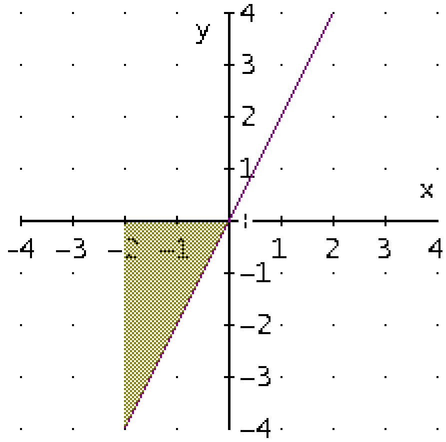
#48: ---

#49: Aber Achtung: Das bestimmte Integral misst nicht automatisch die

Fläche!

#50: Es kann nämlich negativ oder null werden, obwohl Fäche vorhanden ist. Beispiele:

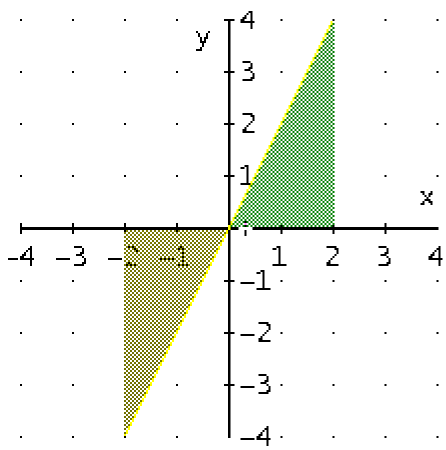
#51: AreaOverCurve(2·x, x, −2, 0)



#52: $$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -4$$

#53: Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt.

#54: AreaUnderCurve(2·x, x, 0, 2)



#55: $$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$$

#56: Wenn man über Nullstellen hinweg integriert, werden Flächen unterhalb der x-Achse abgezogen.

#57: Merke: Niemals über Nullstellen hinweg integrieren!

#58: ---