#1: Intergralrechnung III: Integralfunktion muss Stammfunktion sein

#2: ---

#3: CaseMode := Sensitive

#4: InputMode := Word

#5: ---

#6: Die Fläche unter f(x)=c von 0 bis x wird berechnet durch c*x.

#7: Die Fläche unter f(x)=x von 0 bis x wird berechnet durch x^2/2.

#8: Die Fläche unter f(x)=x^2 von 0 bis x wird berechnet durch x^3/3.

#9: Und bei Übungen zur Streifenmethode (E9, Seite 150) wurde festgestellt:

#10: $$\int_0^3 x^3\,dx = \frac{3^4}{4}$$

#11: $$\int_0^4 x^3\,dx = \frac{4^4}{4}$$

#12: Ohne Beweis ist klar:

#13: Die Fläche unter f(x)=x^3 von 0 bis x wird berechnet durch x^4/4.

#14: Die Integralfunktion (Flächenmessfunktion) ist also hier:

#15: $$I4(x) = \int_0^x x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$$

#16: Und das ist eine Stammfunktion von x^3, denn:

#17: $$\frac{d}{dx}\frac{x^4}{4} = x^3$$

#18: ---

#19: Allgemein gilt, ohne Beweis:

#20: $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

#21: ---

#22: --

#23: Die Flächenmessfunktionen waren bisher immer Stammfunktionen.

#24: Das ist fast immer so, denn wir beweisen:

#25: -------------

#26: Wenn die Randfunktion stetig ist und es eine Flächenmessfunktion gibt, dann ist das eine Stammfunktion!

#27: -------------

#28: D.h. Jede Flächenmessfunktion muss eine Stammfunktion sein, jedenfalls bei stetigem Rand.

#29: Da Stammfunktionen sich nur um eine Konstante unterscheiden, genügt dann irgendeine, um die Fläche zu messen

#30: Wir brauchen dann zum Integrieren nur eine Stammfunktion zu suchen und haben damit die Flächenmessfunktion.

#31: Achtung: Wir zeigen nicht, DASS es immer eine Flächenmessfunktion gibt, sin(1/x) hat z.B. keine!

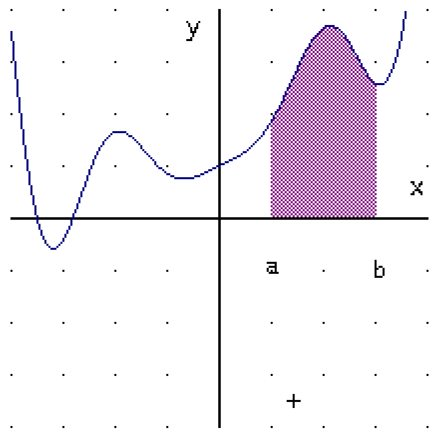
#32: --

#33: Behauptung: Wenn die Randfunktion stetig ist und es eine Flächenmessfunktion gibt, dann ist das eine Stammfunktion!

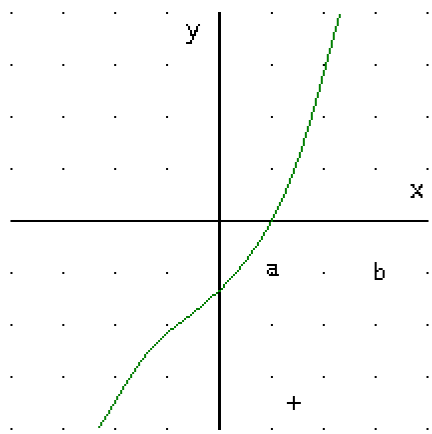
#34: Beweis (siehe auch Seite 158, Satz E9):

#35: Es sei die Funktion f im Intervall [a,b] stetig und es sei I die Flächenmessfunktion (Integralfunktion), welche die Fläche unter Gf von a bis x misst.

#36: Eine Beispielkurve:



#37: Die Flächenmessfunktion dazu:



#38: Die Integralfunktion wird geschrieben als Integral über f von a bis x:

#39: $I(x) := \int_a^x f(t)\, dt$

#40: -------------

#41: Zu zeigen ist, dass die Ableitung von I(x) gleich f(x) ist.

#42: D.h., dass der Grenzwert des Differenzenquotienten von I(x) den Wert f(x) ergeben muss.

#43: -------------

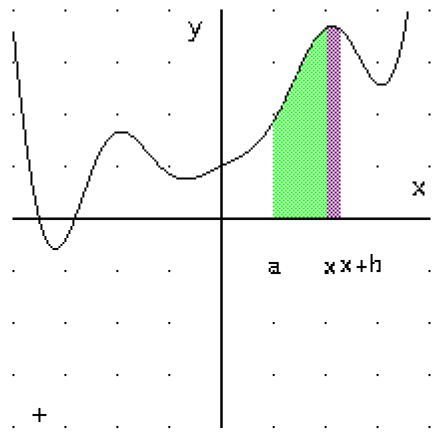
#44: Wir bestimmen den Differenzenquotienten von I(x):

#45: $\dfrac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \dfrac{I(x + h) - I(x)}{x + h - x}$

#46: $\dfrac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \dfrac{I(x + h) - I(x)}{h}$

#47: Wir setzen ein:

#48: $$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$



#49: Die Differenz im Zähler ist aber das Integral von x bis (x+h), siehe Bild. Deshalb gilt:

#50: $$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

#51: -------------

#52: Das Integral ∫(f(t), t, x, x + h) ist nach unten und oben begrenzt, denn:

#53: Da f im Intervall [a;b] stetig ist, ist f auch im Intervall [x;x+h] stetig.

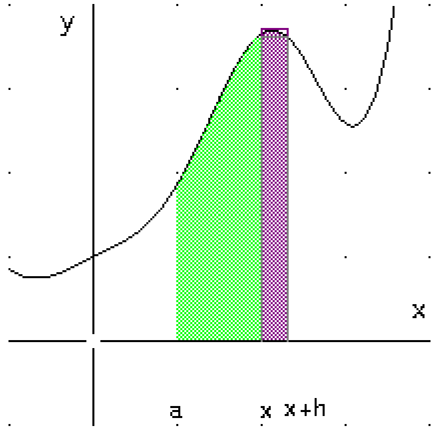
#54: Deshalb muss f im Intervall [x;x+h] einen kleinsten Funktionswert f(k) und einen größten Funktionswert f(g) haben.

#55: Die x-Werte k und g liegen im Intervall [x;x+h] und sind von h abhängig.

#56: Wenn f z.B. monoton steigend wäre, wäre k=x und g=x+h.

#57: Die Fläche unter Gf im Intervall [x;x+h] muss deshalb zwischen den Rechtecken aus dem kleinsten Funktionswert f(k) und dem größten

Funktionswert f(g) liegen.



#58: Also muss gelten:

#59: $$f(k)\cdot h \le \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \le f(g)\cdot h$$

#60: -------------

#61: h ist positiv. Deshalb können wir die Ungleichung durch h teilen, ohne die Relation umzukehren:

#62: $$\frac{f(k)\cdot h}{h} \le \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le \frac{f(g)\cdot h}{h}$$

#63: Links und rechts können wir h kürzen, denn h ist positiv, also nicht null:

#64: $$f(k) \le \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le f(g)$$

#65: Der Differenzenquotient liegt also zwischen dem kleinsten und größten Funktionswert im Intervall [x;x+h].

#66: -------------

#67: Wir betrachten den Grenzfall für h gegen 0:

#68: $$\lim_{h\to 0} f(k) \le \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le \lim_{h\to 0} f(g)$$

#69: Wenn wir h immer kleiner machen, dann rücken die x–Werte k und g immer näher an x heran, weil k und g zwischen x und x+h liegen. D.h., dass f(k) und f(g) auf f(x) zulaufen. Es muss also gelten:

#70:
$$f(x) \le \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le f(x)$$

#71: Das kann nur gelten, wenn:

#72:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x)$$

#73: Das heißt:

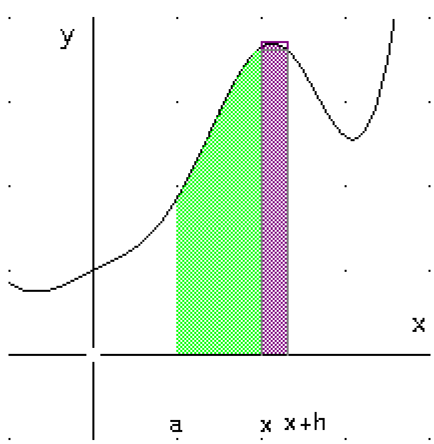
#74:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = f(x)$$

#75: D.h., dass der Grenzwert des Differenzenquotienten von I(x) den Wert f(x) ergeben hat.

#76: q.e.d.

#77: --

#78: Wiederholung, noch einmal anschaulich.



#79: Die Differenz des Integrals von a bis (x+h) und des Integrals von a bis x, ist der Differenzenquotient der Integralfunktion. Das ist der schmale Streifen zwischen x und x+h.

#80: Die Streifenfläche ist für sehr kleine h ungefähr die Fläche des Rechtecks h*f(x).

#81: Wenn ich das durch h teile, muss die Höhe des Rechtecks, also f(x) übrig bleiben.

#82: Das ist des Pudels Kern.

#83: --