#1: Intergralrechnung IV: Hauptsatz der Diff und Inte

#2: --

#3: Wir haben in Kapitel III bewiesen:

#4: -------------

#5: Wenn die Randfunktion stetig ist und es eine Flächenmessfunktion gibt, dann ist das eine Stammfunktion!

#6: -------------

#7: D.h. Jede Flächenmessfunktion muss eine Stammfunktion sein, jedenfalls bei stetigem Rand.

#8: Da Stammfunktionen sich nur um eine Konstante unterscheiden, genügt dann irgendeine, um die Fläche zu messen

#9: Es muss also für jede Stammfunktion F von f gelten:

#10: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$

#11: Was ist aber c ?

#12: Wir berechnen das Integral von a bis a:

#13: $I(a) = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c$

#14: Das Integral von a bis a ist aber null. Deshalb gilt:

#15: $F(a) + c = 0$

#16: Also ist c:

#17: $c = - F(a)$

#18: --

#19: Wir berechnen das Integral von a bis b:

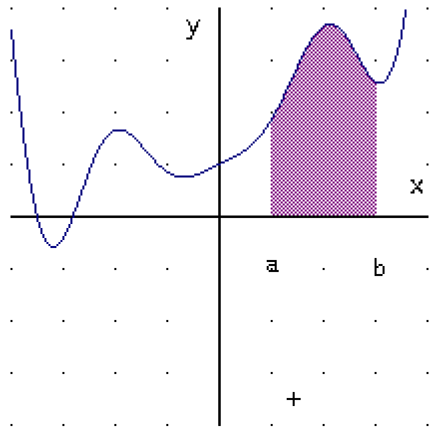
#20: $I(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + c$

#21: Da c=-F(a) war, ergibt sich:

#22: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

#23: Das t benennen wir um in x:

#24: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$



#25: Das ist der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

#26: Wenn eine Funktion f im Intervall [a,b] stetig ist, dann lässt sich das Integral von f im Intervall [a;b] mit jeder beliebigen Stammfunktion F berechnen, indem man die Differenz der Stammfunktionswerte für die Intervallgrenzen berechnet.

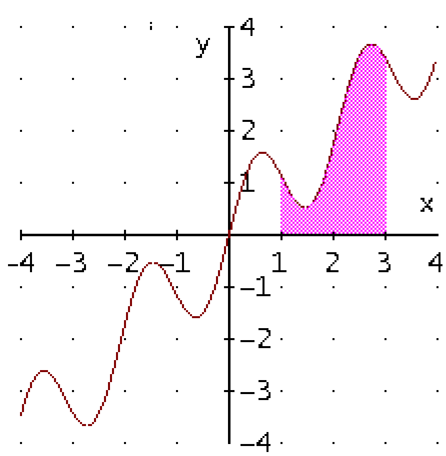
#27: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

#28: Kurz:

#29: Integral von a bis b gleich Stamm von Obergrenze minus Stamm von Untergrenze.

#30: ---

#31: Beispiel:



#32: $f(x) :\approx x + \mathrm{SIN}(3\cdot x)$

#33: Gesucht: Integral von 1 bis 3:

#34: $\int_1^3 (x + \mathrm{SIN}(3\cdot x))\, dx$

#35: Ich bestimme zunächst eine Stammfunktion:

#36: $\int (x + \mathrm{SIN}(3\cdot x))\, dx$

#37: $$\frac{x^2}{2} - \frac{\mathrm{COS}(3\cdot x)}{3}$$

#38: $F(x) :\approx \frac{x^2}{2} - \frac{\mathrm{COS}(3\cdot x)}{3}$

#39: Ich berechne F(b) - F(a) :

#40: $$F(3) = \frac{9}{2} - \frac{\mathrm{COS}(9)}{3}$$

#41: $$F(1) = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{COS}(3)}{3}$$

#42: $F(3) - F(1) = \frac{9}{2} - \frac{\mathrm{COS}(9)}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{COS}(3)}{3}\right)$

#43: $$F(3) - F(1) = - \frac{\mathrm{COS}(9)}{3} + \frac{\mathrm{COS}(3)}{3} + 4$$

#44: $$F(3) - F(1) = 3.973712588$$

#45: Die gesuchte Fläche ist knapp 4 Flächeneinheiten groß.

#46: --