#1: Integration durch lineare Substitution

#2: ---------------------------

#3: CaseMode := Sensitive

#4: InputMode := Word

#5: ---------------------------

#6: Erinnerung an die Kettenregel:

#7: Ableitung der Verkettung ist äußere Ableitung mal innere Ableitung.

#8: $F(x) := V(u(x))$

#9: $f(x) := v(u(x))\cdot u'(x)$

#10: Beispiel:

#11: $F(x) := (2\cdot x - 1)^{3/2}$

#12: Äußere ist V(z)=z^(3/2) und innere ist z=u(x)=2x–1. Ableitung:

#13: $f(x) := \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x - 1)^{1/2}\cdot 2$

#14: Wenn man jetzt das folgende Integral bestimmen sollte

#15: $\int \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x - 1)^{1/2}\cdot 2\ dx$

#16: dann sieht man, dass die 2 rechts die innere Ableitung von
u(x)=2x–1 ist und dass der Term davor die äußere Ableitung ist.

#17: Die äußere Ableitung ist also v(u(x)= 3/2·(2·x – 1)^(1/2) oder
v(z)=3/2·(z)^(1/2).

#18: Wir intergrieren v(z) wie eine normale Potenzfunktion:
(Exponent+1 und teilen)

#19: $V(z) := \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2} + 1}\cdot z^{1/2 + 1}$

#20: $V(z) := \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot z^{3/2}$

#21: $V(z) :\!= z^{3/2}$

#22: Wir ersetzen z und erhalten die Stammfunktion:

#23: $F(x) :\!= (2\cdot x - 1)^{3/2}$

#24: ----------------------------

#25: Wenn man äußere und innere Ableitung im Integranden erkennt, gibt es also kein Problem.

#26: Die Probleme ergeben sich, wenn man es nicht sofort erkennt. Beispiel:

#27: $\int 3\cdot(2\cdot x - 1)^{1/2}\, dx$

#28: Dies ist die gleiche Funktion wie oben in #15, aber die 2 ist gekürzt.

#29: Man erkennt an (2·x − 1)^(1/2) dass eine Verkettung vorliegt, dass aber die innere Ableitung fehlt.

#30: Wir fügen die innere Ableitung, die 2, als Faktor hinzu und teilen zugleich:

#31: $\int \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x - 1)^{1/2}\cdot 2\, dx$

#32: Damit haben wir die Form von #15 wiederhergestellt und können integrieren wie zuvor.

#33: ----------------------------

#34: Eine weitere Verschärfung ergibt sich, wenn auch der Faktor 3 fehlt:

#35: $\int (2\cdot x - 1)^{1/2}\, dx$

#36: Wir erkennen:

#37: 1. Es liegt eine Verkettung vor: v(z)=z^(1/2) mit z=(2x−1).

#38: 2. Die innere Ableitung von u(x)=z=(2x−1) fehlt.

#39: Wir bilden probeweise die Stammfunktion von v(z):

#40: $V(z) := \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot z^{3/2}$

#41: Wir ersetzen z durch u(x):

#42: $Ftest(x) := \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot x - 1)^{3/2}$

#43: Wir leiten ab, um zu prüfen, ob der Integrand von #35 herauskommt:

#44: $Ftest'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 1)^{1/2} \cdot 2$

#45: $Ftest'(x) = (2 \cdot x - 1)^{1/2} \cdot 2$

#46: Das ist nicht genau der Integrand von #35. Der Faktor 2 ist zuviel.

#47: Also werden wir die richtigte Stammfunktion F bekommen, wenn wir Ftest durch 2 teilen:

#48: $F(x) := \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot x - 1)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}$

#49: $F(x) := \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x - 1)^{3/2}$

#50: Probe durch Ableitung nach Kettenregel:

#51: $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 1)^{3/2 - 1} \cdot 2$

#52: $F'(x) = (2 \cdot x - 1)^{1/2}$

#53: Das ist der Integrand aus #35.

#54: ----------------------------

#55: Wir verallgemeinern das leicht.

#56: $\int (m \cdot x + n)^{1/2} \, dx$

#57: Es liegt eine Verkettung vor: v(z)=z^(1/2) mit z=(mx+n).

#58: $Ftest(x) := \frac{2}{3} \cdot (m \cdot x + n)^{3/2}$

3

#59: $Ftest'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (mx + n)^{1/2} \cdot m$

#60: $Ftest'(x) = (mx + n)^{1/2} \cdot m$

#61: Der Faktor m ist zuviel, vgl. #56.

#62: Also entsteht F(x), wenn ich Ftest(x) durch m teile:

#63: $F(x) := \frac{2}{3} \cdot (m \cdot x + n)^{3/2} \cdot \frac{1}{m}$

#64: Wir haben also die Stammfunktion zu (m·x + n)^(1/2) gebildet und durch die innere Ableitung m geteilt.

#65: ----------------------------

#66: Wir verallgemeinern das noch einmal, es muss ja keine Wurzelverkettung sein.

#67: $\int v(m \cdot x + n)\, dx$

#68: Es liegt eine Verkettung v(z) vor mit z=(mx+n).

#69: Wir bilden die Stammfunktion V(z) dazu.

#70: $Ftest(x) := V(m \cdot x + n)$

#71: Wir leiten ab:

#72: $Ftest'(x) = v(mx + n) \cdot m$

#73: Der Faktor m ist zuviel, vgl. #67.

#74: Also entsteht F(x), wenn ich Ftest(x) durch m teile:

#75: $F(x) = \frac{1}{m} \cdot V(m \cdot x + n)$

#76: ----------------------------

#77: Satz E 12:

#78: Wenn die innere Funktion einer Verkettung linear ist (mx+n), dann erhält man die Stammfunktion der Verkettung, indem man die Stammfuktion der äußeren Funktion bildet und durch die Ableitung der inneren Funktion teilt.

#79: $\int v(m\cdot x + n)\, dx = \frac{1}{m}\cdot V(mx + n) + C$

#80: ---------------------------

#81: Beispiel:

#82: $\int (4\cdot x + 2)^{5/3}\, dx$

#83: $v(z) = z^{5/3}$

#84: $m = 4$

#85: $V(z) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\frac{5}{3} + 1}\cdot z^{5/3 + 1}\right)$

#86: $V(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot z^{8/3}$

#87: $F(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot(4\cdot x + 2)^{8/3}$

#88: $F(x) = \frac{3}{32}\cdot(4\cdot x + 2)^{8/3}$

#89: ---------------------------