#1: Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

#2: ------------------------------

#3: $F(x) :\!= u(x)\cdot v(x)$

#4: $F'(x) = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$

#5: Wenn der Term rechts der Integrand ist, gibt es kein Problem.

Beispiel:

#6: $\int (x^2\cdot \mathrm{COS}(x) + 2\cdot x\cdot \mathrm{SIN}(x))\, dx$

#7: u(x)*v'(x) + u'(x)*v(x)

#8: Man erkennt: u(x)=x^2 und v(x)=sin(x). Also ist die Stammfunktion:

#9: $F(x) :\!= x^2\cdot \mathrm{SIN}(x)$

#10: $\int (x^2\cdot \mathrm{COS}(x) + 2\cdot x\cdot \mathrm{SIN}(x))\, dx = x^2\cdot \mathrm{SIN}(x) + C$

#11: ------------------------------

#12: Das Problem entsteht, wenn der Integrand nur aus u(x)*v'(x) oder

u'(x)*v(x) besteht. Beispiel:

#13: $\int x^2\cdot \mathrm{COS}(x)\, dx$

#14: u(x)*v'(x)

#15: Man erkennt: u(x)=x^2 und v(x)=sin(x), weil v'(x)=cos(x). Also

probieren wir die Stammfunktion:

#16: $\mathrm{Ftest}(x) :\!= x^2\cdot \mathrm{SIN}(x)$

#17: $\mathrm{Ftest}'(x) = x^2\cdot \mathrm{COS}(x) + 2\cdot x\cdot \mathrm{SIN}(x)$

#18: Die Ableitung ist nicht der Integrand. 2x*SIN(x) ist zuviel.

#19: Also müssen wir Ftest vermindern um die Stammfunktion von

2x*SIN(x), damit wir die wahre Stammfunktion bekommen.

#20: F(x) = Ftest – Stamm(2x*SIN(x))

#21: $F(x) :\!= x^2\cdot \mathrm{SIN}(x) - \int 2\cdot x\cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx$

#22: Probe:

#23: $F'(x) = x^2 \cdot COS(x) + 2 \cdot x \cdot SIN(x) - \text{Abltg}(\int 2 \cdot x \cdot SIN(x)\, dx)$

#24: Die Ableitung des Integrals ist aber der Integrand:

#25: $F'(x) = x^2 \cdot COS(x) + 2 \cdot x \cdot SIN(x) - 2 \cdot x \cdot SIN(x)$

#26: $F'(x) = x^2 \cdot COS(x)$

#27: ----------------

#28: Also haben wir:

#29: $\int x^2 \cdot COS(x)\, dx = x^2 \cdot SIN(x) - \int 2 \cdot x \cdot SIN(x)\, dx + C$

#30: D.h.: Integral über u*v' ist u*v minus Integral über u'*v.

#31: $\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$

#32: Toll: Wir haben ein Integral durch ein anderes ersetzt.

#33: Das macht natürlich nur Sinn, wenn wir das Integral von 2x*sin(x) bestimmen können.

#34: Wir wiederholen den Vorgang für das verbliebene Integral:

#35: $\int 2 \cdot x \cdot SIN(x)\, dx$

#36: u(x)*v'(x)

#37: $F(x) = 2 \cdot x \cdot (-\ COS(x)) - \int 2 \cdot (-\ COS(x))\, dx$

#38: $F(x) = 2 \cdot x \cdot (-\ COS(x)) - 2 \cdot \int -\ COS(x)\, dx$

#39: $F(x) = 2 \cdot x \cdot (-\ COS(x)) - 2 \cdot (-\ SIN(x))$

#40: $F(x) = -\ 2 \cdot x \cdot COS(x) + 2 \cdot SIN(x)$

#41: Also haben wir das Integral aufgelöst:

#42: $\int 2 \cdot x \cdot SIN(x)\, dx = -\ 2 \cdot x \cdot COS(x) + 2 \cdot SIN(x)$

#43: ----------------

#44: Jetzt ersetzen wir das Integral aus #29 mit der Lösung aus #42:

#45: $\int x^2 \cdot COS(x)\, dx = x^2 \cdot SIN(x) - \int 2 \cdot x \cdot SIN(x)\, dx + C$

#46: $\int x^2 \cdot COS(x)\, dx = x^2 \cdot SIN(x) - (-\ 2 \cdot x \cdot COS(x) + 2 \cdot SIN(x)) + C$

$\int \ ^2 \qquad\qquad ^2$

#47: $\int x \cdot \mathrm{COS}(x)\ dx = x \cdot \mathrm{SIN}(x) + 2 \cdot x \cdot \mathrm{COS}(x) - 2 \cdot \mathrm{SIN}(x) + C$

#48: -----------------

#49: Die endgültige Lösung ist also:

#50: $\int x^2 \cdot \mathrm{COS}(x)\ dx = (x^2 - 2) \cdot \mathrm{SIN}(x) + 2 \cdot x \cdot \mathrm{COS}(x) + C$

#51: -----------------

#52: Probe:

#53: $\frac{d}{dx} ((x^2 - 2) \cdot \mathrm{SIN}(x) + 2 \cdot x \cdot \mathrm{COS}(x) + C)$

#54: $x^2 \cdot \mathrm{COS}(x)$

#55: Das ist der Integrand.

#56: -----------------

#57: Merke:

#58: Wenn man ein Produkt zweier Funktionen integrieren muss,

#59: dann fasst man einen Faktor als u(x) und den anderen als v'(x) auf.

#60: Das Integral über (u*v') ist dann: u*v - Integral(u'*v).

#61: $\int u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\ dx$

#62: Man versucht dann das Integral(u'*v) zu lösen.

#63: Wenn das nicht geht, dann tauscht man u(x) und v'(x) aus und versuche es erneut.

#64: Wenn das auch nicht geht, dann hat man ein Problem.

#65: -----------------