#1: Extrempunkte von Flächen im Raum

#2: ------------------------------------

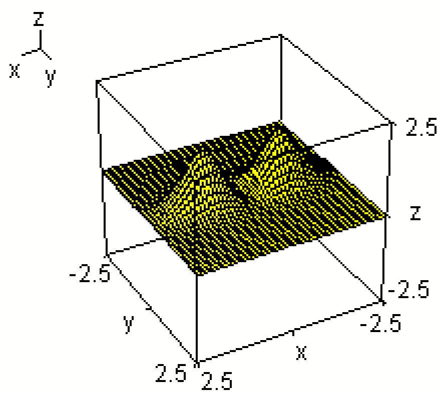
#3: ------------------------------------

#4: $f(x, y) := (4\cdot x^2 + y^2)\cdot \mathrm{EXP}(-x^2 - 4\cdot y^2)$

#5: ------------------------------------

#6: Zeichnung mit feinerer Einteilung als im Derive-Standard:

#7: VECTOR(VECTOR([x, y, f(x, y)], x, -2.5, 2.5, 0.1), y, -2.5, 2.5, 0.1)



#8: ------------------------------------

#9: 1. Kriterium: Erste Ableitung gleich 0.

#10: $\frac{d}{dx} f(x, y)$

#11: $8\cdot x\cdot e^{-x^2 - 4\cdot y^2} - 2\cdot x\cdot e^{-x^2 - 4\cdot y^2}\cdot(4\cdot x^2 + y^2)$

#12: $\frac{d}{dy} f(x, y)$

#13: $-2\cdot y\cdot e^{-x^2 - 4\cdot y^2}\cdot(16\cdot x^2 + 4\cdot y^2 - 1)$

#14: Die Ableitung muss in jeder Richtung null sein:

#15: $\frac{d}{dx} f(x, y) = 0 \wedge \frac{d}{dy} f(x, y) = 0$

⎛d d ⎞

#16: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{d}{dx} f(x, y) = 0 \wedge \frac{d}{dy} f(x, y) = 0, [x, y], \mathrm{Real}\right)$

#17: $(x = -1 \wedge y = 0) \vee (x = 1 \wedge y = 0) \vee \left(x = 0 \wedge y = -\frac{1}{2}\right) \vee \left(x = 0 \wedge y = \frac{1}{2}\right) \vee (x = 0 \wedge y = 0)$

#18: Mögliche Extremstellen sind also:

#19: $P1 := [-1, 0]$

#20: $P2 := [1, 0]$

#21: $P3 := \left[0, -\frac{1}{2}\right]$

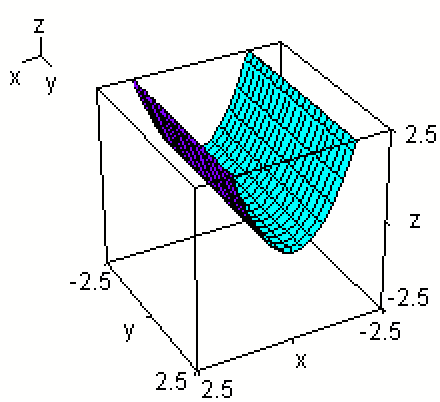
#22: $P4 := \left[0, \frac{1}{2}\right]$

#23: $P5 := [0, 0]$

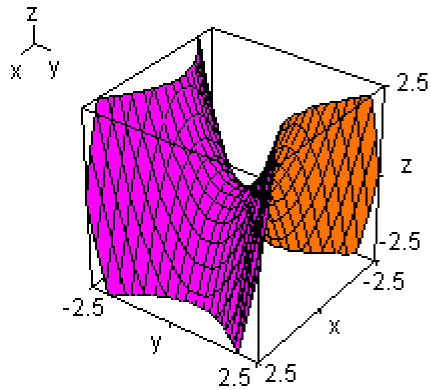
#24: ------------------------------------

#25: Bei den möglichen Extremstellen liegen nicht automatisch wirkliche EP, denn auch in Sattelpunkten oder Dachrinnen ist die erste Ableitung null.

#26: $z = x^2$



#27: $z = y^2 - x^2$



#28: ————————————————————————————————————

#29: Also muss mit den zweiten Ableitungen überprüft werden, was los ist.

#30: Problem: Es gibt zwei partielle erste Ableitungen und

#31: zu jeder ersten Ableitung gibt es zwei zweite Ableitungen.

#32: Also sind vier zweite Ableitungen zu untersuchen.

#33: $$D2(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x, y) & \frac{d}{dy}\frac{d}{dx} f(x, y) \\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x, y) & \frac{d}{dy}\frac{d}{dy} f(x, y) \end{bmatrix}$$

#34: —————————————————

#35: Eine 2-2-Determinante rechnet man so aus(Hauptdiagonale minus Nebendiagonale):

#36: $$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

#37: —————————————————

#38: 2. Kriterium für mögliche Extrempunkte von Flächen im Raum:

#39: 1. Ist die Determinate der zweiten Ableitungen positiv, dann liegt eine Extremstelle vor, für Max oder Min.

#40: 2. Wenn zusätzlich a, also ∂(∂(f(x, y), x), x), positiv ist, dann liegt dort ein Min vor.

#41: Wenn zusätzlich a, also ∂(∂(f(x, y), x), x), negativ ist, dann liegt dort ein Max vor.

#42: 3. Ist die Determinate der zweiten Ableitungen negativ, dann ist unbestimmt, was vorliegt. SP? Rinne?

#43: ----------------

#44: Wir hatten als mögliche Extremstellen P1 bis P5.

#45: Wir berechnen die Determinanten der zweiten Ableitungen:

#46: P1 := [-1, 0]

#47: $$D2(-1, 0) = \begin{bmatrix} -16\cdot e^{-1} & 0 \\ 0 & -30\cdot e^{-1} \end{bmatrix}$$

#48: $$DET(D2(-1, 0)) = 480\cdot e^{-2}$$

#49: DET > 0 und ∂(∂(f(x, y), x), x) < 0, also HP bei P1.

#50: --------------------

#51: P2 := [1, 0]

#52: $$D2(1, 0) = \begin{bmatrix} -16\cdot e^{-1} & 0 \\ 0 & -30\cdot e^{-1} \end{bmatrix}$$

#53: $$DET(D2(1, 0)) = 480\cdot e^{-2}$$

#54: DET > 0 und ∂(∂(f(x, y), x), x) < 0, also HP bei P2.

#55: --------------------

#56: $P3 := \left[0, -\frac{1}{2}\right]$

#57: $$D2\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{15\cdot e^{-1}}{2} & 0 \\ 0 & -4\cdot e^{-1} \end{bmatrix}$$

#58: $$DET\left(D2\left(0, -\frac{1}{2}\right)\right) = -30\cdot e^{-2}$$

#59: DET negativ, also unbestimmt in P3; SP bei P3 nach Anschauung.

#60: --------------------

#61: $P4 := \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$

#62: $$D2\left(0,\ \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{15 \cdot e^{-1}}{2} & 0 \\ 0 & -4 \cdot e^{-1} \end{bmatrix}$$

#63: $$DET\left(D2\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right) = -30 \cdot e^{-2}$$

#64: DET negativ, also unbestimmt in P4; aber SP bei P4 nach Anschauung.

#65: --------------------

#66: P5 := [0, 0]

#67: $$D2(0,\ 0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

#68: $$DET(D2(0,\ 0)) = 16$$

#69: DET > 0 und ∂(∂(f(x, y), x), x) > 0, also TP für P5.

#70: --------------------

#71: Lösung (Berechnung der gesuchten Punkte):

#72: HP1 := [-1, 0, f(-1, 0)]

#73: $$HP1 := \left[-1,\ 0,\ 4 \cdot e^{-1}\right]$$

#74: $$HP1 := [-1,\ 0,\ 1.471517764]$$

#75: HP2 := [1, 0, f(1, 0)]

#76: $$HP2 := \left[1,\ 0,\ 4 \cdot e^{-1}\right]$$

#77: $$HP2 := [1,\ 0,\ 1.471517764]$$

#78: $SP3 := \left[0,\ -\frac{1}{2},\ f\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)\right]$

$$\left[\quad 1 \quad e^{-1} \right]$$

#79: $SP3 := \left[0,\ -\frac{}{2},\ \frac{}{4}\right]$

#80: SP3 := [0, -0.5, 0.09196986029]

#81: $SP4 := \left[0,\ \frac{1}{2},\ f\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right]$

#82: $SP4 := \left[0,\ \frac{1}{2},\ \frac{e^{-1}}{4}\right]$

#83: SP4 := [0, 0.5, 0.09196986029]

#84: TP5 := [0, 0, f(0, 0)]

#85: TP5 := [0, 0, 0]

#86: ---------------------

#87: ---------------------

#88: Aufgabe:

#89: $g(x, y) := e^{-x^2 + 2\cdot x - 3\cdot y^2 + 6\cdot y - 4}\cdot(3\cdot x^2 - 6\cdot x - y^2 - 2\cdot y + 4)$

#90: Zeichnen Sie den Graphen möglichts anschaulich und bestimmen Sie die Extrempunkte.

#91: ---------------------

#92: Es gilt:

#93: 1. Ableitungen=0 und DET>0 und fxx > 0, dann TP

#94: 1. Ableitungen=0 und DET>0 und fxx <0 , dann HP

#95: 1. Ableitungen=0 und DET<0 , dann SP

#96: 1. Ableitungen=0 und DET=0 , dann keine Aussage

#97: ---------------------