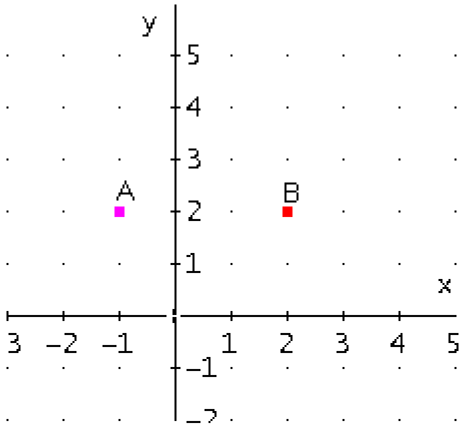
Schwerpunkte von Massepunkten

Gegeben sind zwei Massepunkte. Gesucht ist deren SP.

#1: A := [-1, 2]

#2: B := [2, 2]



Die Achse y=2 ist eine Symmetrieachse und daher die horizontale Schwerelinie.

Der Punkt A soll die Masse 2 haben, Punkt B die Masse 4.

Der gemeinsame Schwerpunkt muss rechts von der y-Achse,

liegen, weil man das Hebelgesetz beachten muss.

#3: Hebelgesetz: Last mal Lastarm gleich Kraft mal Kraftarm

#4: xs sei der x-Wert der Schwereline. Die Massepunkte sind [-1;2] und [2;2].

#5: Wir rechnen hier:

#6: Masse von A mal Abstand von Schwerelinie = Masse von B mal Abstand von Schwerelinie

#7: mA :=

#8: mB :=

#9: mC :=

#10: xs :=

#11: ys :=

#12: $mA \cdot (xs - -1) = mB \cdot (2 - xs)$

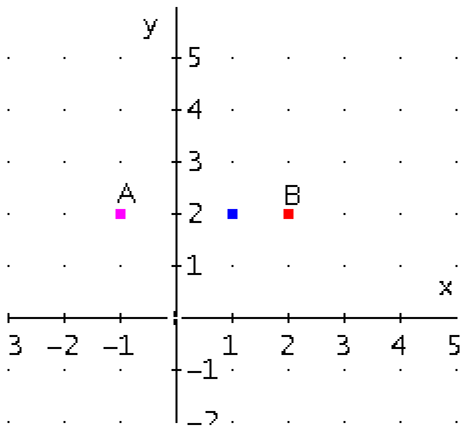
#13: $xs = \frac{2 \cdot mB - mA}{}$

$$mA + mB$$

#14: $$xs = \frac{2 \cdot 4 - 2}{2 + 4}$$

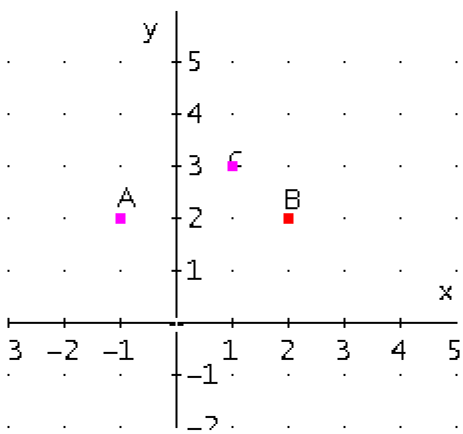
#15: $xs = 1$

Der gemeinsame Schwerpunkt ist der Punkt [xs;ys] = [1 ; 2].



#16: --

#17: Wir nehmen einen dritte Massepunkt hinzu: C=[1,3] mit Masse 6.



#18: Nach Hebelgesetz müssen die Drehmomente null sein.

#19: --------------------------

#20: Drehmomente in x-Richtung:

#21: $mA \cdot (xs - -1) + mB \cdot (xs - 2) + mC \cdot (xs - 1) = 0$

#22: $$xs = \frac{(-1) \cdot mA + 2 \cdot mB + 1 \cdot mC}{mA + mB + mC}$$

#23: Formel erkennbar:

#24: Summe x*Masse für alle Punkte, durch Summe aller Massen

#25: $xs = \frac{(-1)\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6}{2 + 4 + 6}$

#26: $xs = 1$

#27: ---------------------------

#28: Drehmomente in y-Richtung:

#29: $mA\cdot(ys - 2) + mB\cdot(ys - 2) + mC\cdot(ys - 3) = 0$

#30: $ys = \frac{2\cdot mA + 2\cdot mB + 3\cdot mC}{mA + mB + mC}$

#31: Formel erkennbar:

#32: Summe y*Masse für alle Punkte, durch Summe aller Massen

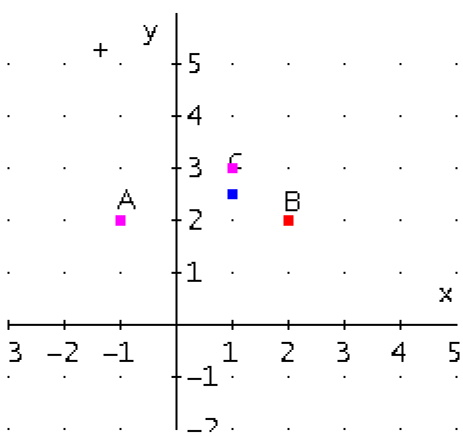
#33: $ys = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6}{2 + 4 + 6}$

#34: $ys = \frac{5}{2}$

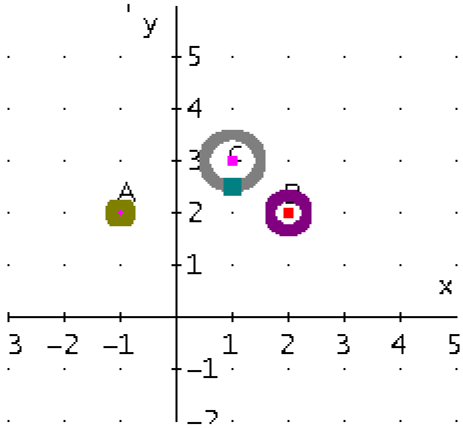
#35: ---------------------------

#36: Gesuchter Schwerpunkt der drei Punkte:

#37: $SP := \left[1, \frac{5}{2}\right]$



#38: Zeichnung mit Massen in Kreisdarstellung:



#39: --------------------------

#40: Wenn man die Berechnung von drei Massenpunkten auf n Massenpunkte verallgemeinert, dann gilt offensichtlich für S=[xs,ys]:

#41: $$xs = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

#42: D.h.: xs ist Summe x mal Masse durch Summe der Massen.

#43: $$ys = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

#44: D.h.: ys ist Summe y mal Masse durch Summe der Massen.

#45: ------- Ende --------------------

#46: ------- Ausblick --------------------

#47: Das führt unmittelbar zum Schwerpunkt von Kurvenstücken.

#48: Ein Kurvenstück ist eine unendliche Summe von kleinen Massen gleicher Größe.

#49: Wo liegt z.B. der Schwerpunkt des Parabelbogens f(x)=x^2 von x=0 bis x=4 ?

#50: ------- Ende Ausblick ----------