

#1: Schwerpunkt eines ebenen Bogens

#2: -----

#3: $x_s :=$

#4: $y_s :=$

#5: $x(t) :=$

#6: $y(t) :=$

#7: -----

#8: $f(t) := [x(t), y(t)]$

#9: Behauptung: Der Schwerpunkt eines ebenen Bogens $f(t)$ von $t=a$ bis $t=b$ wird nach folgenden Formeln berechnet:

$$\int_a^b x(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt$$

#10: $x_s = \frac{\int_a^b x(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt}{\int_a^b \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt}$

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt$$

$$\int_a^b y(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt$$

#11: $y_s = \frac{\int_a^b y(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt}{\int_a^b \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt}$

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| dt$$

#12: x_s ist Integral von $x(t)$ mal Betrag der Ableitung von f geteilt durch die Länge des Bogens insgesamt.

#13: y_s ist das Integral von $y(t)$ mal Betrag der Ableitung von f geteilt durch die Länge des Bogens insgesamt.

#14: ----- Herleitung -----

#15: Gegeben sei die Kurve $g(t)$ von $t=1$ bis $t=3$ mit:

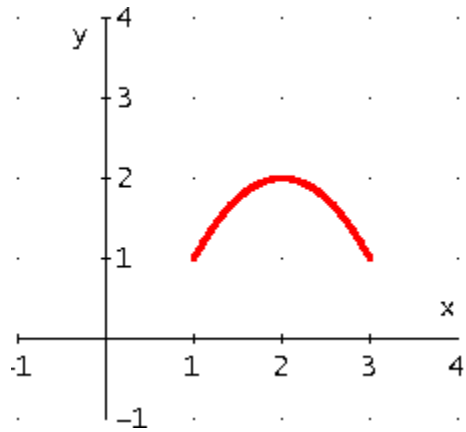
#16: $g_x(t) := t$

#17: $gy(t) := -(t - 2)^2 + 2$

#18: $g(t) := [gx(t), gy(t)]$

#19: $g(t) := [t, -t^2 + 4 \cdot t - 2]$

#20: VECTOR($g(t)$, t , 1, 3, 0.01)



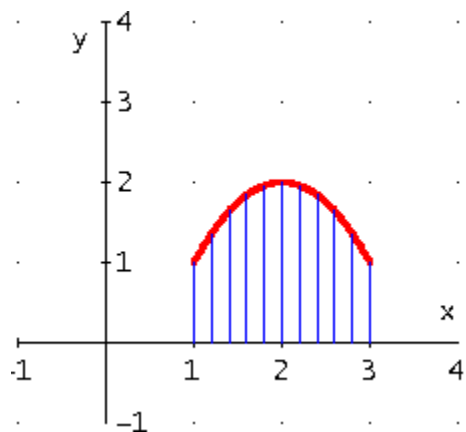
#21: Gesucht ist der Schwerpunkt der Kurve $[xs, ys]$.

#22: Klar ist, dass $xs=2$ sein wird.

#23: Wir teilen die Kurve in 10 Abschnitte:

#24: $xt(i) := 1 + i \cdot 0.2$

#25: VECTOR($\begin{bmatrix} xt(i) & 0 \\ xt(i) & gy(xt(i)) \end{bmatrix}$, i , 0, 10, 1)



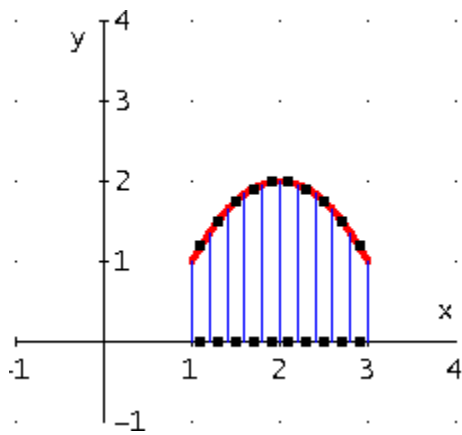
#26: Die Mittelpunkte der Kurvenstücke für $i=0..9$ sind:

#27: $mxt(i) := 1 + 0.1 + i \cdot 0.2$

#28: $myt(i) := gy(mxt(i))$

($\begin{bmatrix} mxt(i) & 0 & 1 & \end{bmatrix}$)

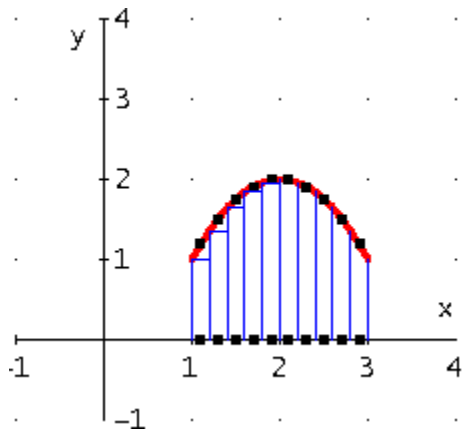
#29: VECTOR $\left(\begin{bmatrix} \text{mxt}(i) & \text{gy}(\text{mxt}(i)) \end{bmatrix}, i, 0, 9, 1 \right)$



#30: Das Gewicht der Kurvenstücke entspricht der Länge der Kurvenstücke.

#31: Dies ist angenähert die Länge der Sekante in den kleinen Steigungsdreiecken.

#32: VECTOR $\left(\begin{bmatrix} \text{xt}(i) & \text{gy}(\text{xt}(i)) \\ \text{xt}(i + 1) & \text{gy}(\text{xt}(i)) \end{bmatrix}, i, 0, 4, 1 \right)$



#33: Die Länge der Sekanten L_{Sek} muss nach Pythagoras sein: $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

#34: $L_{\text{Sek}}(i) := \sqrt{((\text{gy}(\text{xt}(i + 1)) - \text{gy}(\text{xt}(i))))^2 + (\text{xt}(i + 1) - \text{xt}(i))^2}$

#35: Im Schwerpunkt müssen die Summen der Drehmomente in x- und y-Richtung null sein.

#36: Drehmomente horizontal (x-Richtung):

#37: $\sum_{i=0}^9 (\text{xs} - \text{mxt}(i)) \cdot L_{\text{Sek}}(i) = 0$

$$\#38: \sum_{i=0}^9 (x_s \cdot L_{\text{Sek}}(i) - m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)) = 0$$

$$\#39: \left(\sum_{i=0}^9 x_s \cdot L_{\text{Sek}}(i) \right) - \sum_{i=0}^9 m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i) = 0$$

$$\#40: \sum_{i=0}^9 x_s \cdot L_{\text{Sek}}(i) = \sum_{i=0}^9 m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)$$

$$\#41: x_s \cdot \sum_{i=0}^9 L_{\text{Sek}}(i) = \sum_{i=0}^9 m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)$$

$$\#42: x_s = \frac{\sum_{i=0}^9 m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)}{\sum_{i=0}^9 L_{\text{Sek}}(i)}$$

$$\#43: x_s = 2$$

#44: Das war erwartet: $x_s=2$.

#45: -----

#46: Verallgemeinerung für x_s :

$$\#47: x_s = \frac{\sum_{i=0}^9 m_{\text{xt}}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)}{\sum_{i=0}^9 L_{\text{Sek}}(i)}$$

#48: Wenn wir nicht 10, sondern 10000 oder gar ∞ viele Punkte nehmen, dann wird aus der Summe ein Integral.

#49: Und aus $\sum(L_{\text{Sek}}(i), i, 0, 9)$ wird die Gesamtlänge des Bogens.

#50: Die Mittelpunkte $m_{\text{xt}}(i)$ nehmen alle Werte an, daraus wird also $g_x(t)$, der x-Wert in der Definition von g .

#51: Die Sekanten $L_{\text{Sek}}(i)$ werden immer kleiner, werden also zum Differential ds des Bogens.

#52: Betrachten wir $L_{\text{Sek}}(i)$ genauer.

#53: $\Delta x :=$

#54: $\Delta y :=$

#55: $\Delta t :=$

#56: $dx :=$

#57: $dy :=$

#58: $dt :=$

#59: $L_{\text{Sek}}(i) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

#60: Wenn wir mit $\Delta t/\Delta t$ erweitern, sehen wir, was L_{Sek} eigentlich ist:

#61: $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$

#62: $\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$

#63: $\sqrt{\left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2\right)} \cdot \Delta t$

#64: Im Grenzfall, für Δt gegen 0, ergibt sich:

#65: $\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)} \cdot dt$

#66: Die Wurzel ist der Betrag der Ableitung der Funktion, welche die Kurve beschreibt.

#67: Anschaulich: Die Gewichte der Kurvenstücke sind die Längen kleiner Tangentenabschnitte.

#68: Aus der Summenformel

#69:
$$x_s = \frac{\sum_{i=0}^9 m_{xt}(i) \cdot L_{\text{Sek}}(i)}{\sum_{i=0}^9 L_{\text{Sek}}(i)}$$

#70: wird im Grenzfall also die Integralformel

$$\int^3 |d|$$

$$\#71: \quad x_s = \frac{\int_1^3 g_x(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} g(t) \right| dt}{\int_1^3 \left| \frac{d}{dt} g(t) \right| dt}$$

#72: $x_s = 2$

#73: x_s errechnet sich als Integral über die x-Komponente von g , gewichtet mit dem Bogenelement (Betrag der Ableitung), geteilt durch die Gesamtlänge des Bogens.

#74: -----

#75: Verallgemeinerung für y_s

#76: Für die Berechnung in y -Richtung wird im Prinzip genau die gleiche Rechnung durchgeführt. Man nimmt nur anstelle der mittleren x -Werte die mittleren y -Werte.

#77: $myt(i) :=$

#78: Die Gewichte der Kurvenstücke bleiben die gleichen. Das führt zu:

$$\#79: \quad y_s = \frac{\sum_{i=0}^9 myt(i) \cdot L_{Sek}(i)}{\sum_{i=0}^9 L_{Sek}(i)}$$

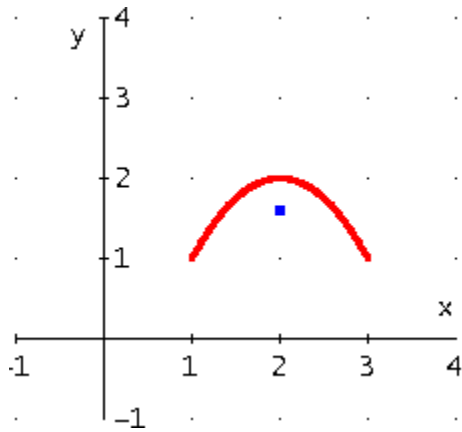
#80: Und als Integral ergibt das:

$$\#81: \quad y_s := \frac{\int_1^3 g_y(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} g(t) \right| dt}{\int_1^3 \left| \frac{d}{dt} g(t) \right| dt}$$

#82: $y_s := 1.590019782$

#83: Der Schwerpunkt des Parabelbogens ist also:

#84: SP := [2, 1.590019782]



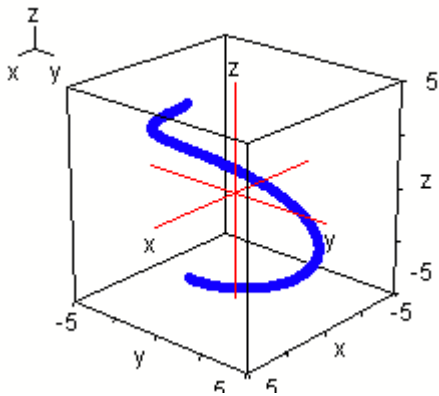
#85: ----- Ende -----

#86: Ausblick

#87: Wenn man eine Kurve in 3D hat, gelten die gleichen Formeln, nur eine mehr für die Komponente in z-Richtung. Beispiel:

#88: $h(t) := [3 \cdot \cos(t), 4 \cdot \sin(t), 0.2 \cdot t^2 - 3]$

#89: $\text{VECTOR}\left([h(t)], t, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{100}\right)$



$$\int_0^{2 \cdot \pi} 3 \cdot \cos(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

#90: $hxs := \frac{\int_0^{2 \cdot \pi} \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt}{2 \cdot \pi}$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

2 · π

$$\int_0^{2\pi} 4 \cdot \sin(t) \cdot \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

#91: hys :=

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

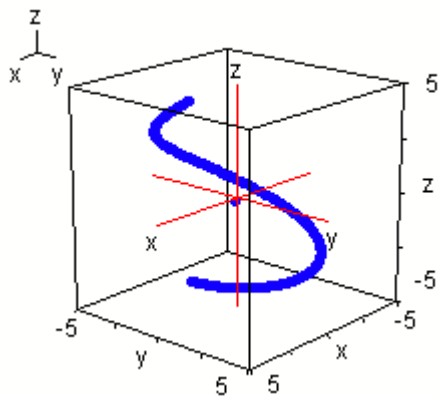
$$\int_0^{2\pi} (0.2 \cdot t^2 - 3) \cdot \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

#92: hzs :=

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h(t) \right| dt$$

#93: hSP := [hxs, hys, hzs]

#94: hSP := [0.02824783691, -0.145770536, -0.2068916929]



#95: ----- Ende -----