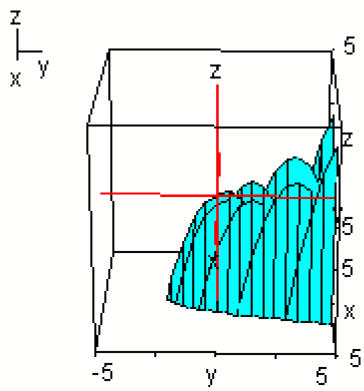
# Eine gebirgige Fläche ohne Hochpunkt

#1: $f(x, y) := -(y - 2\cdot x^2)\cdot(y - x^2)$

#2: $f(x, y) := -2\cdot x^4 + 3\cdot x^2\cdot y - y^2$

#3: Zeichnung durch Derive nach Aufruf von Plot für Zeile #1:




Behauptung: Es gibt keinen Hochpunkt!

Beweis:

Die Funktion f ist offensichtlich für jedes Paar [x,y] definiert und differenzierbar.

Wenn also einen Hochpunkt gibt, dann nur dort, wo die beiden ersten partiellen Ableitung null sind.

#4: $\frac{d}{dx} f(x, y) = 6\cdot x\cdot y - 8\cdot x^3$

#5: $\frac{d}{dy} f(x, y) = 3\cdot x^2 - 2\cdot y$

#6: $\frac{d}{dx} f(x, y) = 0 \wedge \frac{d}{dy} f(x, y) = 0$

#7: $x = 0 \wedge y = 0$

#8: $f(0, 0) = 0$

## D.h.: [0,0,0] ist der einzig mögliche Hochpunkt des Graphen.

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitung ist die Hesse-Matrix:

⌈ d d d d ⌉

$$\#9:\quad HM(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x, y) & \frac{d}{dy}\frac{d}{dx} f(x, y) \\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x, y) & \frac{d}{dy}\frac{d}{dy} f(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\#10:\quad HM(x, y) := \begin{bmatrix} 6\cdot(y - 4\cdot x^2) & 6\cdot x \\ 6\cdot x & -2 \end{bmatrix}$$

Die Determinante der Hesse-Matrix für [0,0] ist null:

$$\#11:\quad DET(HM(0, 0)) = 0$$

Das bedeutet, dass die hinreichende Bedingung für Hochpunkte nicht erfüllt ist.

Das heißt, dass man nichts weiß und genauere Untersuchungen anstellen muss.

Der Punkt [xH, yH, f(xH,yH)] heißt Hochpunkt der Funktion f(x,y)=z,
wenn es in der Ebene eine Umgebung des Punktes [xH,yH] gibt,
für die gilt,
dass für alle [x,y]≠[xH,yH] aus der Umgebung die Funktionswerte f(x,y) kleiner als f(xH,yH) sind.

Der Punkt [xo, yo, f(xo,yo)] ist KEIN Hochpunkt der Funktion f(x,y)=z,
wenn es in jeder Umgebung des Punktes [xo,yo] mindestens einen Punkt [x,y]≠[xo,yo] gibt,
für den gilt,
dass der Funktionswert f(x,y) größer oder gleich f(xo,yo) ist.

Behauptung: [0,0,0] ist kein Hochpunkt!

#12: Für ein beliebig kleines ε besteht die Umgebung Uε von [0,0] aus den Punkten [x,y] mit:

$$\#13:\quad x^2 + y^2 < \varepsilon^2$$

#14: Das sind die Punkte innerhalb des Kreises mit dem Radius ε um den Mittelpunkt [0,0].

#15: Die Punkte auf dem halben Radius liegen dann sicher innerhalb des Kreises mit dem Radius ε:

#16: $$x^2 + y^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

#17: Ich wähle einen Punkte [x,y], der auf dem Kreis mit r=ε/2 und auf einer Parabel liegt:

#18: $$x^2 + y^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \wedge y = 2\cdot x^2$$

#19: $$x\varepsilon := \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1)}}{4}$$

#20: $$y\varepsilon := \frac{\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1}{4}$$

#21: Der Punkt [xε,yε] liegt auf dem Kreis mit r=ε/2, denn es gilt:

#22: $$x\varepsilon^2 + y\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

#23: Und für den Punkt [xε,yε] gilt:

#24: $$f(x\varepsilon,\ y\varepsilon) = -\,(y\varepsilon - 2\cdot x\varepsilon^2)\cdot(y\varepsilon - x\varepsilon^2)$$

#25: $$f(x\varepsilon,\ y\varepsilon) = -\left(\frac{\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1}{4} - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1)}}{4}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1}{4} - \left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{(4\cdot\varepsilon^2 + 1)} - 1)}}{4}\right)^2\right)$$

#26: $$f(x\varepsilon,\ y\varepsilon) = 0$$

D.h., dass es in jeder ε -Umgebung von [0,0] mindestens einen

Punkt gibt, dessen Funktionswert nicht kleiner, sondern gleich 0 ist. q.e.d.

Das würde schon ausreichen als Beweis, aber ich kann noch einen Punkt angeben, dessen Funktionswert größer als null ist.

#27: $x^2 + y^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \wedge y = 1.5\cdot x^2$

#28: $xg := \frac{\sqrt{(\sqrt{(9\cdot\varepsilon^2 + 4)} - 2)}}{3}$

#29: $yg := \frac{\sqrt{(9\cdot\varepsilon^2 + 4)} - 2}{6}$

#30: $f(xg, yg) = \frac{(\sqrt{(9\cdot\varepsilon^2 + 4)} - 2)^2}{324}$

#31: Das ist postiv, weil der Radikand reell ist und das Quadrat davon positiv.

#32: ----------------------------------------------

## Hintergrund

Wenn y=k*x^2 ist, mit 1 < k < 2, dann liegt  f(x, kx^2) auf einer Parabel, die sich im Positiven bis [0,0,0] hinzieht.

#33: $\text{VECTOR}([x, k\cdot x^2, f(x, k\cdot x^2)], k, 1, 2, 0.2)$

$$\begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ x & \frac{6\cdot x^2}{5} & \frac{4\cdot x^4}{25} \\ x & \frac{7\cdot x^2}{} & \frac{6\cdot x^4}{} \end{bmatrix}$$

#34: $$\begin{bmatrix} & 5 & 25 \\ x & \dfrac{8\cdot x^2}{5} & \dfrac{6\cdot x^4}{25} \\ x & \dfrac{9\cdot x^2}{5} & \dfrac{4\cdot x^4}{25} \\ x & 2\cdot x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

#35: Beispiel:

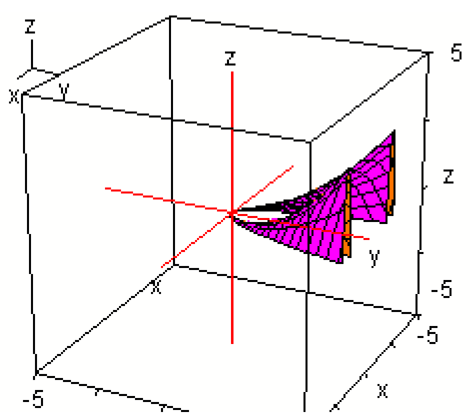
#36: $$f(x, 1.5\cdot x^2) = \frac{x^4}{4}$$

#37: $$f(0.1, 1.5\cdot 0.1^2) = \frac{1}{40000}$$

## Zeichnung

#38: $$g(t, k) := \text{VECTOR}\left(\left[t, k\cdot t^2, f(t, k\cdot t^2)\right], t, -5, 5, 0.1\right)$$

#39: VECTOR(g(t, k), k, 1, 2, 0.1)




#40: Vom Punkt [0,0,0] zieht sich ein Parabelgebirge nach oben.

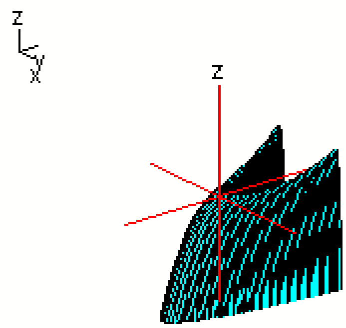
#41: Deshalb findet man auf jedem Kreis um [0,0] zwei Punkte, deren Funktionswerte positiv sind.

#42: Es sind die Schnittpunkte des Kreises mit einer der Parabeln.

#43: ---------------------------------------------------

#44: Zeichnung mit besserer Auflösung:

#45: VECTOR(VECTOR(f(x, y), x, -5, 5, 0.1), y, -5, 5, 0.1)




#46: --------------------------------------------------