#1: Beweis der Stetigkeit mit der ε–δ–Definition

#2: --

#3: $f(x) := x^2$

#4: Behauptung: f ist stetig für alle xo ε R.

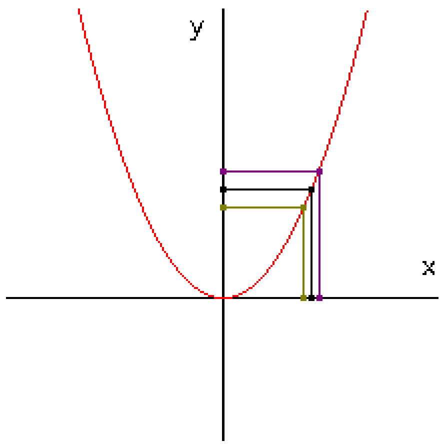
#5: Zu zeigen ist, dass es zu jeder ε–Umgebung von f(xo) eine δ–Umgebung von xo so gibt,

#6: dass alle Funktionswerte f(x) von x–Werten aus der δ–Umgebung in der ε–Umgebung von f(xo) liegen.

#7: --

#8: 1. Fall: Es sei xo positiv, also xo > 0 .

#9: Es sei ε>0 beliebig klein vorgegeben.



#10: Es gilt:

#11: $f(xo) - ε < f(xo) < f(xo) + ε$

#12: Die Wurzel ist monoton, d.h. aus $a < b$ folgt $\sqrt{a} < \sqrt{b}$:

#13: $\sqrt{(f(xo) - ε)} < \sqrt{(f(xo))} < \sqrt{(f(xo) + ε)}$

#14: $\sqrt{(xo^2 - ε)} < \sqrt{(xo^2)} < \sqrt{(xo^2 + ε)}$

#15: $\sqrt{(xo^2 - ε)} < xo < \sqrt{(xo^2 + ε)}$

#16: Ich betrachte auf der Suche nach δ die Abstände zu xo nach rechts und links:

#17: $δr(ε) := \sqrt{(xo^2 + ε)} - xo$

#18: $\delta l(\varepsilon) := xo - \sqrt{(xo^2 - \varepsilon)}$

#19: Beide Abstände sind positiv, wegen der Ungleichung in #15.

#20: Aber der Abstand rechts ist kleiner, weil f(x) quadratisch steigt.

#21: $\delta r(\varepsilon) < \delta l(\varepsilon)$

#22: Ich wähle den $\delta r(\varepsilon)$ für die δ-Umgebung von xo.

#23: --

#24: Es sei nun ein x aus dieser Umgebung beliebig gewählt:

#25: $|x - xo| < \delta r(\varepsilon)$

#26: Das bedeutet, dass x zwischen den Endpunkten des Intervalls liegt:

#27: $xo - \delta r(\varepsilon) < x < xo + \delta r(\varepsilon)$

#28: Weil $\delta l(\varepsilon)$ größer als $\delta r(\varepsilon)$ ist, mache ich die linke Seite kleiner, wenn ich δl einsetze:

#29: $xo - \delta l(\varepsilon) < x < xo + \delta r(\varepsilon)$

#30: Ich setze ein:

#31: $xo - (xo - \sqrt{(xo^2 - \varepsilon)}) < x < xo + (\sqrt{(xo^2 + \varepsilon)} - xo)$

#32: $\sqrt{(xo^2 - \varepsilon)} < x < \sqrt{(xo^2 + \varepsilon)}$

#33: Ich quadriere:

#34: $xo^2 - \varepsilon < x^2 < xo^2 + \varepsilon$

#35: xo^2 ist f(xo) und x^2 ist f(x):

#36: $f(xo) - \varepsilon < f(x) < f(xo) + \varepsilon$

#37: Das bedeutet:

#38: $|f(x) - f(xo)| < \varepsilon$

#39: Ich habe gezeigt, dass es zu jeder ε-Umgebung von f(xo) eine δ-Umgebung von xo so gibt,

#40: dass alle Funktionswerte f(x) von x-Werten aus der δ-Umgebung in der ε-Umgebung von f(xo) liegen.

#41: q.e.d.

#42: Der Fall 2 für negative xo geht analog, man muss nur das richtige Intervall wählen.