#1: Stetige Ergänzung einer Funktion RxR ----> R

#2: --

#3: Gegeben ist die Funktion:

#4: $$f(x, y) := \frac{x - y}{|x| - |y|}$$

#5: Sie ist zunächst nicht definiert für $|x|=|y|$.

#6: $Df = RxR \setminus \{(x,y) \mid |x|=|y|\}$

#7: Ausgenommen sind zunächst die beiden Winkelhalbierenden in der Ebene.

#8: --

#9: 1. Beh.: f ist stetig ergänzbar auf der positiven Winkelhalbierenden im 1. Quadranten der Ebene, für alle Paare (x,y) mit x>0 und y>0 und x=y.

#10: Beweis:

#11: Es sei (xo,yo) vorgegeben mit xo>0 und yo>0 und xo=yo.

#12: Es sei (xn,yn) eine Folge in Df mit dem Grenzwert (xo,yo).

#13: Da die Grenzwerte xo und yo beide positiv sind, müssen xn und yn ab einer gewissen Nummer no auch positiv sein.

#14: Für die positiven xn und yn gilt außerdem, dass xn≠yn sein muss. Wären xn und yn gleich, lägen sie nicht im Df.

#15: Daraus folgt, dass die Differenzen (xn–yn) und (|xn|–|yn|) beide ungleich null sind.

#16: Der folgende Bruch ist deshalb in Zähler und Nenner ungleich null:

#17: $$f(xn, yn) = \frac{xn - yn}{|xn| - |yn|}$$

#18: Da xn und yn positiv sind, gilt |xn|=xn und |yn|=yn. Also ist der Bruch zu vereinfachen zu:

#19: $$f(xn, yn) = \frac{xn - yn}{xn - yn}$$

#20: Das bedeutet:

#21: $f(xn, yn) = 1$

#22: Deshalb gilt für alle betrachteten Folgen (xn,yn), die gegen (xo,yo) laufen:

#23: $\lim\limits_{n\to\infty} f(xn, yn) = 1$

#24: D.h., dass f bei (xo,yo) mit xo>0 und yo>0 und xo=yo durch f(xo,yo)=1 stetig ergänzbar ist.

#25: ---

#26: 2. Beh.: f ist stetig ergänzbar auf der negativen Winkelhalbierenden im 3. Quadranten der Ebene, für alle Paare (x,y) mit x<0 und y<0 und x=y.

#27: Beweis:

#28: Es sei (xo,yo) vorgegeben mit xo<0 und yo<0 und xo=yo.

#29: Es sei (xn,yn) eine Folge in Df mit dem Grenzwert (xo,yo).

#30: Da die Grenzwerte xo und yo beide negativ sind, müssen xn und yn ab einer gewissen Nummer no auch negativ sein.

#31: Für die negativen xn und yn gilt außerdem, dass xn≠yn sein muss. Wären xn und yn gleich, lägen sie nicht im Df.

#32: Daraus folgt, dass die Differenzen (xn−yn) und (|xn|−|yn|) beide ungleich null sind.

#33: Der folgende Bruch ist deshalb in Zähler und Nenner ungleich null:

#34: $f(xn, yn) = \dfrac{xn - yn}{|xn| - |yn|}$

#35: Da xn und yn beide negativ sind, gilt |xn|=−xn und |yn|=−yn. Also ist der Bruch zu vereinfachen zu:

#36: $f(xn, yn) = \dfrac{xn - yn}{-xn - -yn}$

#37: Das ist aber:

$xn - yn$

#38: $f(xn, yn) = \dfrac{}{-\ (xn - yn)}$

#39: Das bedeutet:

#40: $f(xn, yn) = -1$

#41: Deshalb gilt für alle betrachteten Folgen (xn,yn), die gegen (xo,yo) laufen:

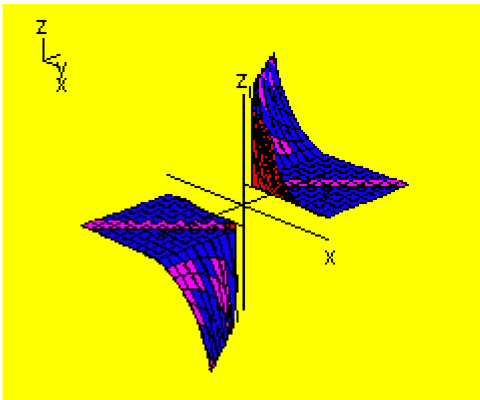
#42: $\lim_{n\to\infty} f(xn, yn) = -1$

#43: D.h., dass f bei (xo,yo) mit xo<0 und yo<0 und xo=yo durch f(xo,yo)=-1 stetig ergänzbar ist.

#44: ---

#45: Stetige Ergänzung

#46:
```
fe(x, y) :=
  If x = y ∧ x > 0
     1
     If x = y ∧ x < 0
        -1
        f(x, y)
```



#47: ---

#48: 3. Beh.: Auf der zweiten Winkelhalbierenen (y=-x) ist f nicht stetig ergänzbar.

#49: 3a) Beweis für den Fall y>0 und x<0 (Winkelhalbierende im 2. Quadranten)

#50: Es sei der Punkt (xo,yo) gegeben mit xo<0 und yo=-xo, also yo>0. Z.B. (xo,yo)=(-3,3).

#51: Es sei (xn,yn) eine Folge in Df mit dem Grenzwert (xo,yo).

#52: Weil yo=-xo ist, läuft der Zähler (xn-yn) gegen (xo-(-xo)). Das ist (xo+xo), also 2*xo. Im Beispiel: -6

#53: Die Differenz im Nenner (|xn| - |yn|) läuft immer gegen null. Aber die Differenz kann negativ oder positiv sein!

#54: Deshalb gilt für diesen Fall (xo negativ, yo positiv):

#55: $$\lim_{n\to\infty} f(xn, yn) = \lim_{n\to\infty} \frac{xn - yn}{|xn| - |yn|} = \frac{2\cdot xo}{0} = \pm\infty$$

#56: ----------------

#57: Beispiele:

#58: Es sei: xo = -3, also 2xo = -6. Näherung von rechts.

#59: $$\lim_{n\to\infty} f\left(-3 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right) = \infty$$

#60: Dies gilt, weil |xn|-|yn| auch negativ ist, wie -6.

#61: ----------------

#62: Es sei: xo = -3, also 2xo = -6. Näherung von links.

#63: $$\lim_{n\to\infty} f\left(-3 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right) = -\infty$$

#64: Dies gilt, weil |xn|-|yn| positiv ist, aber -6 ist negativ.

#65: --

#66: 3b) Beweis für den Fall y<o und x>0 (Winkelhalbierende im 4. Quadranten)

#67: Die Argumentation für den Fall (xo=yo und xo positiv und yo negativ) verläuft analog: Nicht stetig ergänzbar.

#68: --

#69: 4. Beh.: Die Argumentation für den Fall (xo,yo)=(0,0) verläuft analog: Nicht stetig ergänzbar.

#70: --