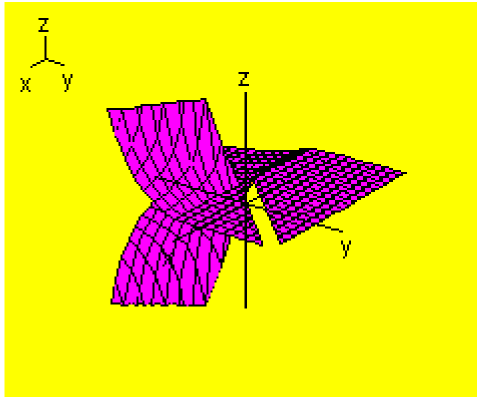
#1: Aufgabe: Untersuchen Sie die Funktion g an den kritischen Stellen auf stetige Ergänzbarkeit.

#2: $$g(x, y) := \frac{x - y}{x - |y|}$$



#3: Lösung ab #55

#4: ------------------------

#5: Vorüberlegungen:

#6: Die Funktion g ist nicht definiert für alle Paare (x,y) mit x=|y|, weil der Nenner dort null wird.

#7: Ausgeschlossen sind also alle Paare (x,y) mit x≥o und y=x oder y=-x.

#8: Beispiele zu ausgeschlossenen Paaren:

#9: gNenner(x, y) := x - |y|

#10: gNenner(0, 0) = 0

#11: gNenner(1, 1) = 0

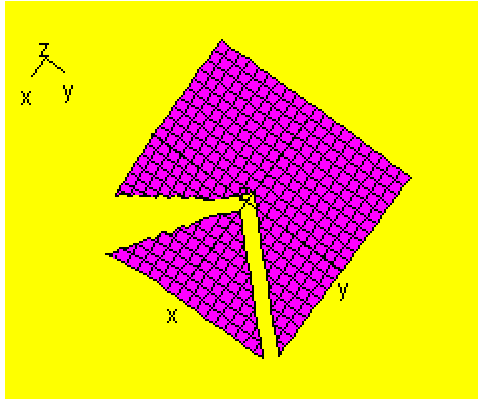
#12: gNenner(1, -1) = 0

#13: Beispiele zu NICHT ausgeschlossenen Paaren:

#14: gNenner(-1, 1) = -2

#15: gNenner(-1, -1) = -2

#16: Es sind also die Winkelhalbierenden der Ebene für postive x-Werte ausgeschlossen:



#17: Die Winkelhalbierenden mit negativem x sind aber zugelassen.

#18: (Beispiele für Funktionswerte)

#19: $$g(0,\ 0) = ?$$

#20: $$g(1,\ 1) = ?$$

#21: $$g(1,\ -1) = \pm\infty$$

#22: $$g(-1,\ 1) = 1$$

#23: $$g(-1,\ -1) = 0$$

#24: xo :=

#25: yo :=

#26: Aus den Beispielen ist ersichtlich, dass drei Fälle zu untersuchen sind:

#27: Fall 1: xo=0 und yo=0 .

#28: Fall 2: xo>0 und yo>0 mit xo=yo.

#29: Fall 3: xo>0 und yo<0 mit yo = -xo.

#30: -------------------------

#31: Bevor man einen Beweis ansetzt, muss man wissen, was man beweisen will.

#32: Was ist bei den drei Fällen zu zeigen?

#33: Entweder überlegen oder Beispiele durchrechnen, wie hier:

#34: ------------

#35: Fall 1: (x,y) dicht (0,0) null, aber (x,y) aus dem Dg.

#36: $$g(0,\ -0.1) = -1$$

#37: $g(0, +0.1) = 1$

#38: Vermutung: g nicht stetig ergänzbar bei (0,0), aber Funktionswerte laufen nicht gegen unendlich.

#39: Beweisidee: Zwei konkrete Folgen (0,−yn) und (0,+yn) gegen (0,0) laufen lassen.

#40: ------------

#41: Fall 2: (x,y) dicht bei (1,1), aber (x,y) aus dem Dg.

#42: $g(1 - 0.1, 1 + 0.1) = 1$

#43: $g(1 + 0.1, 1 - 0.1) = 1$

#44: Vermutung: g stetig ergänzbar bei (x,x) durch g(x,x)=1.

#45: Beweisidee: Allgemeine Folgen gegen (x,x) laufen lassen.

#46: ------------

#47: Fall 3: (x,y) dicht bei (1,−1), aber (x,y) aus dem Dg.

#48: $g(1 - 0.1, -1 + 0.1) = \pm\infty$

#49: $g(1 + 0.1, -1 - 0.1) = \pm\infty$

#50: Vermutung: g nicht stetig ergänzbar bei (x,−x), weil Polstelle.

#51: Beweisidee: Zwei konkrete Folgen gegen (x,−x) laufen lassen.

#52: ------------

#53: Die Vorüberlegungen gehören NICHT in den Beweis. Die eigentliche Lösung kommt jetzt.

#54: --

#55: --

#56: Gegeben ist:

#57: $g(x, y) :=\dfrac{x - y}{x - |y|}$

#58: Weil der Nenner (x−|y|) nicht null werden darf, ist der Definitionsbereich von g:

#59: $Dg = R\times R\setminus\{(x,y) \mid x\varepsilon R \wedge y\varepsilon R \wedge x\geq 0 \wedge (y=x \vee y=-x)\}$

#60: ------------

#61: 1. Behauptung: g ist bei (0,0) nicht stetig ergänzbar.

#62: 1. Beweis:

#63: Es sei (xn,yn) die Folge (0, −1/n).

#64: Die Folge liegt in Dg, weil 0−|−1/n|≠0 für nεN. Die Folge liegt auf der negativen y−Achse.

#65: Es gilt bekanntlich:

#66: $$\lim_{n\to\infty} \left[0,\ -\frac{1}{n}\right] = [0,\ 0]$$

#67: Für die Funktionswerte ergibt sich stets der Wert −1, denn:

#68: $$g\left(0,\ -\frac{1}{n}\right) = \frac{0 - -\dfrac{1}{n}}{0 - \left|-\dfrac{1}{n}\right|} = \frac{0 + \dfrac{1}{n}}{0 - \dfrac{1}{n}} = -1$$

#69: Für die Folge der Funktionswerte ergibt sich daher als Grenzwert auch −1:

#70: $$\lim_{n\to\infty} g\left(0,\ -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

#71: Es sei nun (xn,yn) eine andere Folge, nämlich (0, +1/n).

#72: Die Folge liegt in Dg, weil 0−|1/n|≠0 für nεN. Die Folge liegt auf der positiven y−Achse.

#73: Es gilt bekanntlich:

#74: $$\lim_{n\to\infty} \left[0,\ \frac{1}{n}\right] = [0,\ 0]$$

#75: Für die Funktionswerte ergibt sich stets der Wert 1:

#76: $$g\left(0,\ \frac{1}{n}\right) = \frac{0 - \dfrac{1}{n}}{0 - \left|\dfrac{1}{n}\right|} = \frac{0 - \dfrac{1}{n}}{0 - \dfrac{1}{n}} = 1$$

#77: Für die Folge der Funktionswerte ergibt sich daher als Grenzwert auch 1:

#78: $\lim_{n\to\infty} g\left(0, \frac{1}{n}\right) = 1$

#79: Damit ist gezeigt, dass es zwei Folgen (xn,yn) in Dg gibt, deren Grenzwert (0,0) ist, für die aber die Folgen der Funktionswerte g(xn,yn) gegen verschiedene Grenzwerte laufen.

#80: Deshalb kann die Funktion g im Punkte (0,0) nicht stetig ergänzt werden.

#81: ------------

#82: 2. Behauptung: g ist bei (xo,yo) stetig ergänzbar, wenn xo>0, yo>0 und xo=yo.

#83: (xo,yo) liegt auf der Winkelhalbierenden (+x,+x) für x>0.

#84: 2. Beweis:

#85: Es sei (xo,yo) mit xo>0 und yo=xo beliebig aber fest gewählt.

#86: Es sei (xn,yn) eine beliebige Folge in Dg mit lim(xn,yn)=(xo,yo) für n gegen ∞.

#87: Da die Folge (xn,yn) gegen (xo,yo) konvergiert und da nach Vorgabe sowohl xo>0 als auch yo>0 ist,

#88: muss es eine Nummer no geben, von der ab sowohl die xn als auch die yn der Folge (xn,yn) beide positiv sind.

#89: Weil (xn,yn) aus Dg ist, gilt xn≠|yn| und weil yn>0 ist, gilt xn≠yn, d.h. (xn–yn) ist nicht null.

#90: Für diese Folgenglieder von (xn,yn) mit xn>0 und yn>0 ergeben sich daher die folgenden Funktionswerte von g:

#91: $g(xn, yn) = \frac{xn - yn}{xn - |yn|} = \frac{xn - yn}{xn - yn} = 1$

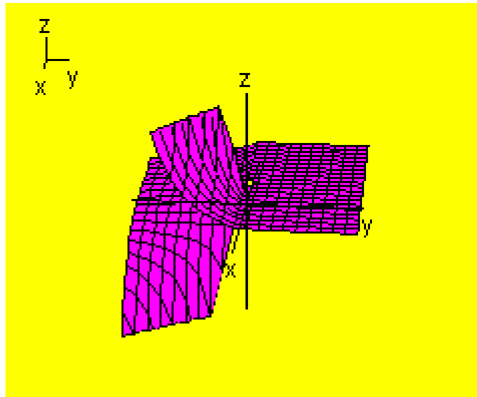
#92: Für die Folge der Funktionswerte ergibt sich daher als Grenzwert auch 1:

#93: $\lim_{n\to\infty} g(xn, yn) = 1$

#94: Deshalb kann die Funktion g in allen Punkte (xo,yo) mit xo=yo und

xo>0 stetig ergänzt werden.

```
      gerg(x, y) :=
        If x > 0 ∧ y > 0 ∧ x = y
#95:       1
           g(x, y)
```



#96: Dgerg = RxR\{(x,y)| xεR ∧ yεR ∧ x≥0 ∧ y≤0 }

#97: ------------

#98: 3. Behauptung: g ist bei (xo,yo) NICHT stetig ergänzbar, wenn

xo>0, yo<0 und xo=|yo|.

#99: (xo,yo) liegt auf der Winkelhalbierenden (+x,-x).

#100: 3. Beweis:

#101: Es sei (xo,yo) mit xo>0 und yo=-xo beliebig aber fest gewählt.

#102: Ich betrachte zwei Folgen, die parallel zur y-Achse laufen.

#103: ------- 1. Folge: Es sei (xn,yn) die Folge (xo, yo-1/n).

#104: Da yo=-xo nach Voraussetzung gilt, kann man die Folge auch

schreiben als: (xo, -xo-1/n)

#105: Die Folge (xo, -xo-1/n) konvergiert von links gegen (xo,-xo) bzw.

(xo,yo):

#106: $$\lim_{n\to\infty} \left[xo,\ -xo - \frac{1}{n}\right] = [xo,\ -xo]$$

#107: Die Funktionswerte für diese Folge sind:

$$xo - \left(-xo - \frac{1}{\ }\right) \qquad xo + xo + \frac{1}{\ }$$

#108: $$g\left(xo,\ -xo - \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\qquad n \right)}{xo - \left|-xo - \frac{1}{n}\right|} = \frac{n}{xo - \left(xo + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{2\cdot xo + \frac{1}{n}}{-\ \frac{1}{n}} = \left(2\cdot xo + \frac{1}{n}\right)\cdot(-n) = -\ 2\cdot xo\cdot n - 1$$

#109: Der Grenzwert der Folge der Funktionswerte ist daher $-\infty$:

#110: $$\lim_{n\to\infty} g\left(xo,\ -xo - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-\ 2\cdot xo\cdot n - 1) = -\ \infty\cdot \mathrm{SIGN}(xo)$$

#111: Weil xo positiv ist, ist SIGN(xo)=+1, also ist das Ergebnis $-\infty$.

#112: ------- 2. Folge: Es sei (xn,yn) die Folge (xo, yo+1/n).

#113: Da yo=-xo nach Voraussetzung gilt, kann man die Folge auch

schreiben als: (xo, -xo+1/n)

#114: Die Folge (xo, -xo+1/n) konvergiert von rechts gegen (xo,-xo) bzw.

(xo,yo):

#115: $$\lim_{n\to\infty} \left[xo,\ -xo + \frac{1}{n}\right] = [xo,\ -xo]$$

#116: Die Funktionswerte für diese Folge sind:

#117: $$g\left(xo,\ -xo + \frac{1}{n}\right) = \frac{xo - \left(-xo + \frac{1}{n}\right)}{xo - \left|-xo + \frac{1}{n}\right|} = \frac{xo + xo - \frac{1}{n}}{xo - \left(xo - \frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{2\cdot xo - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(2\cdot xo - \frac{1}{n}\right)\cdot n = 2\cdot xo\cdot n - 1$$

#118: Der Grenzwert der Folge der Funktionswerte ist daher $+\infty$:

#119: $$\lim g\left(xo,\ -xo + \frac{1}{}\right) = \lim (2\cdot xo\cdot n - 1) = \infty\cdot \mathrm{SIGN}(xo)$$

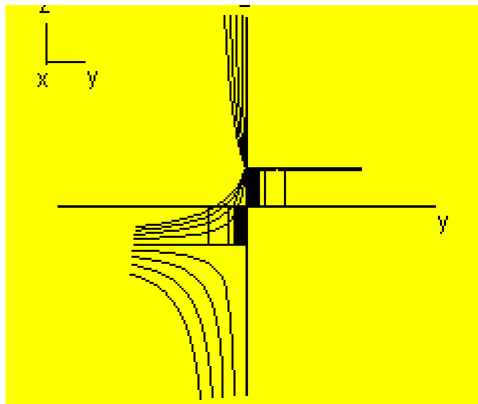
n→∞ ⎩ n ⎭ n→∞

#120: Weil xo positiv ist, ist SIGN(xo)=+1, also ist das Ergebnis +∞.

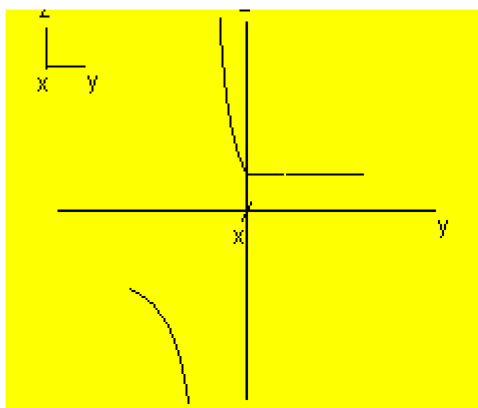
#121: ------- Damit ist gezeigt, dass bei Annäherung von (xn,yn) gegen (xo,–xo) (xo>0) die Folgen der zugehörigen Funktionswerte gegen ±∞ laufen. An den besagten Stellen (xo,–xo) liegen also Polstellen vor. Die Funktion g ist dort nicht stetig ergänzbar.

#122: --

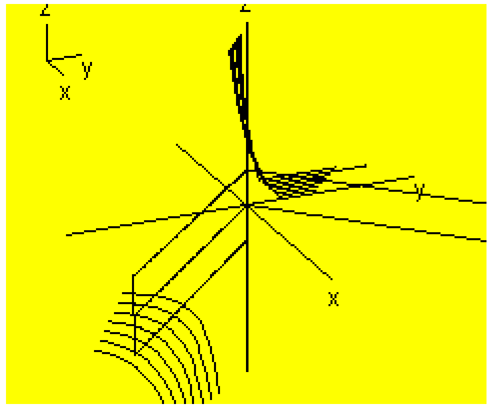
#123: Zeichnung zum Fall 1: GW bei (0,0):



#124: Zeichnung zum Fall 2: GW bei (1,1):



#125: Zeichnung zum Fall 3: GW bei (1,–1):


z
y
x
z
y
x