

Umkehrungen

1. Eine Zuordnung $f: D \rightarrow W$ ist genau dann eine Funktion, wenn jedem x aus D genau ein Wert $f(x)$ aus W zugeordnet ist.

Umkehrung:

Wenn nicht jedem x aus D ein Wert zugeordnet ist oder wenn einem x aus D nicht genau ein, sondern mehr als ein Wert zugeordnet ist, dann ist die Zuordnung keine Funktion, sondern nur eine Relation.

2. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D offenes Intervall aus \mathbb{R}) heißt genau dann stetig bei x_0 ,

- wenn x_0 in D liegt also $f(x_0)$ existiert und
- wenn für jede Folge x_n in D , die gegen x_0 konvergiert, gilt
- dass die Folge $f(x_n)$ konvergiert und zwar gegen $f(x_0)$.

Umkehrung:

Wenn x_0 nicht in D liegt oder wenn es mindestens eine Folge x_n in D mit dem Grenzwert x_0 gibt, für die der Grenzwert von $f(x_n)$ nicht existiert oder nicht $f(x_0)$ ist, dann ist die Funktion f bei x_0 nicht stetig.

3. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D offenes Intervall aus \mathbb{R}) heißt genau dann differenzierbar bei x_0 ,

- wenn x_0 in D liegt also $f(x_0)$ existiert und
- wenn für jede Folge x_n aus D , die gegen x_0 konvergiert, gilt,
- dass die Folge der Sekantensteigungen $(f(x_n)-f(x_0))/(x_n-x_0)$ konvergiert
- und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von f bei x_0 .

Umkehrung:

Wenn x_0 nicht in D liegt oder wenn es mindestens eine Folge x_n in D mit dem Grenzwert x_0 gibt, für die der Grenzwert der Sekantensteigungen $(f(x_n)-f(x_0))/(x_n-x_0)$ nicht existiert

oder wenn es zwei Folgen x_{n1} und x_{n2} in D gibt, die beide gegen x_0 konvergieren, für die aber die Grenzwerte der Sekantensteigungen verschieden sind, dann ist die Funktion f bei x_0 nicht differenzierbar.

- 4a. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D abgeschlossenes Intervall aus \mathbb{R}) heißt genau dann (bestimmt) Riemann-integrierbar im Intervall D , wenn für jede

Zerlegungsfolge des Intervalls D die Folge der Summe der Rechteckstreifen gegen den gleichen Wert konvergiert.

Umkehrung:

Wenn es eine Folge von Rechteckstreifen gibt, die nicht konvergiert oder wenn es zwei Folgen gibt, die gegen verschiedene Werte konvergieren, dann ist die Funktion im Intervall nicht Riemann-integrierbar.

4b. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D abgeschlossenes Intervall aus \mathbb{R}) ist Riemann-integrierbar im Intervall $D=[a,b]$, **wenn(*)** es zu f eine Stammfunktion F mit $F' = f$ gibt. Das Integral ist dann $F(b)-F(a)$.

Die Umkehrung gilt nicht!

D.h., dass f integrierbar sein kann, obwohl es keine Stammfunktion gibt.

(*: „wenn“ ist nicht „genau dann, wenn“)

5a) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit x_0 aus D heißt Tiefpunkt des Graphen G_f der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D Intervall aus \mathbb{R}) genau dann, wenn es ein Intervall in D um x_0 gibt, für das gilt, dass für alle x -Werte aus dem Intervall, außer für $x=x_0$, die Funktionswerte $f(x)$ größer als $f(x_0)$ sind.

Umkehrung:

Wenn x_0 nicht in D liegt oder

- wenn es in jedem Intervall um x_0 mindestens einen x -Wert außer x_0 gibt, für den gilt, dass $f(x)$ kleiner oder gleich $f(x_0)$ ist, dann ist $(x_0, f(x_0))$ kein Tiefpunkt des Graphen G_f .

5b) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit x_0 aus D ist ein Tiefpunkt des Graphen G_f der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D Intervall aus \mathbb{R}), wenn die erste Ableitung von f existiert und diese bei x_0 steigend durch null geht.

Die Umkehrung gilt nicht!

5c) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit x_0 aus D ist ein Tiefpunkt des Graphen G_f der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D Intervall aus \mathbb{R}), wenn die erste Ableitung von f in D existiert und diese bei x_0 das Vorzeichen von Minus nach Plus wechselt.

Die Umkehrung gilt nicht!

5d) Ein Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit x_0 aus D ist ein Tiefpunkt des Graphen G_f der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D Intervall aus \mathbb{R}), wenn die erste und die zweite Ableitung von f in D existieren und wenn gilt, dass $f'(x_0)=0$ ist und wenn zusätzlich $f''(x_0)>0$ ist.

Die Umkehrung gilt nicht!