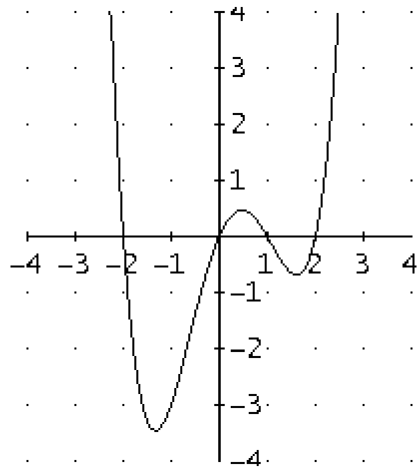
Wie 'malt' man mit Derive?

Es geht um Graphen von Funktionen, Linien, Strecken, Dreiecke usw. Hier in 2D.

#1: Zuerst Funktion definieren mit ':=' nicht mit '=' !

#2: $f(x) := \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2} - 2\cdot x^2 + 2\cdot x$

Zeile #2 anklicken und auf das Sinus-Symbol rechts oben klicken. Das Zeichenfenster öffnet sich.
Jetzt anklicken 'Fenster - Vertikal anordnen'
Wenn der Graph nicht zu sehen ist, dann:
'Einstellen- Zeichenbereich- MinimumMaximum- Rücksetzen'.
Wenn immer noch nichts zu sehen ist oder wenn die Meldung kommt 'Keine Werte im Bereich', dann anklicken
'Extras - Approximieren vor dem Zeichnen'.



#3: Mit 'Datei - Einbetten' holt man die Zeichnung in das Arbeitsblatt, wie

hier oben.

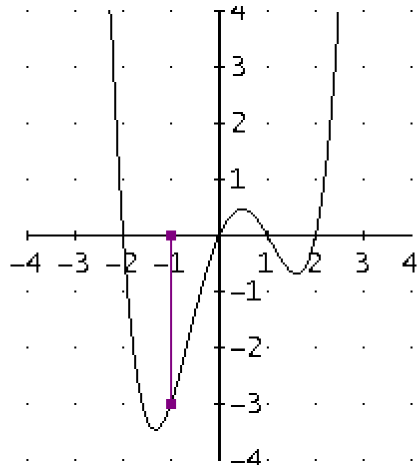
#4: --

Striche zur Kennzeichnung von Punkten des Graphen

Dazu gibt man die x-y-Koordinaten der beiden Punkte, die verbunden werden sollen in eckigen Klammern ein. Dabei x und y mit Komma trennen, die Punkte aber mit Semikolon, also so: [-1,0 ; -1,f(-1)] .
Angezeigt wird dann die folgende Zeile:

#5: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & f(-1) \end{bmatrix}$

Diese markieren und plotten lassen durch Klick auf das Plotsymbol.
Wenn keine Verbindungsstrecke zu sehen ist, dann im Graphikfenster anklicken:
Extras - Anzeige - Punkte - Verbinden

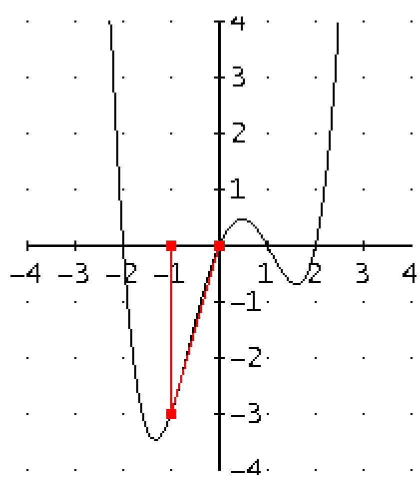


#6: ---

Dreiecke zeichnen

Wir geben die Punkte einfach nacheinander an wie eben:
[-1,0; -1,f(-1); 0,0; -1,0]
Wichtig ist, dass man den ersten Punkt als letzten noch einmal eingeben muss, sonst wird das Dreieck nicht geschlossen.

#7: $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & f(-1) \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

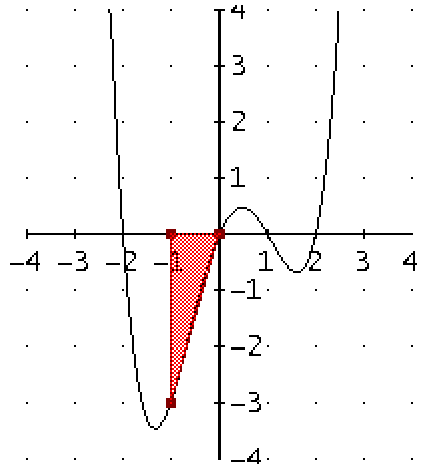


Wenn ich jetzt eingebe: Polygon_Fill(#7), dann erscheint:

#8: $$\text{POLYGON\_FILL}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & f(-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lfloor\ -1 \quad 0\ \rfloor$

Das lasse ich plotten und erhalte:



Die #7 war dabei die Zeile, in der das Polygon stand.

#9: --

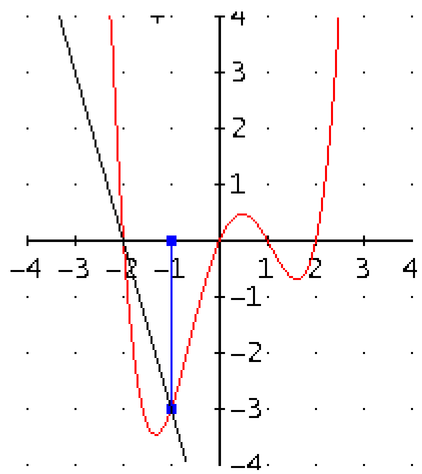
Eine Sekante als Gerade zeichnen

Eine Sekante ist eine 'Schneidende'. Sie geht durch mindestens zwei Punkte des Graphen.
Eine Gerade durch zwei Punkte ist durch folgende Formel gegeben:

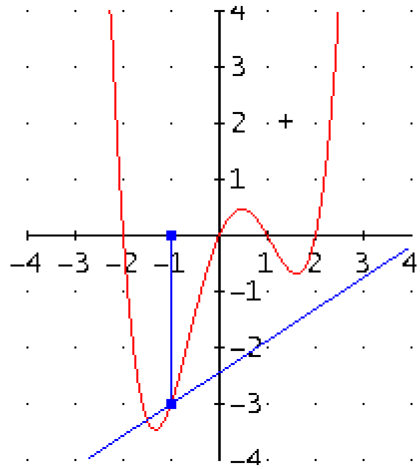
#10: $\text{seka}(x1,\ x2) := \dfrac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}\cdot(x - x1) + f(x1)$

#11: seka(−2, −1)

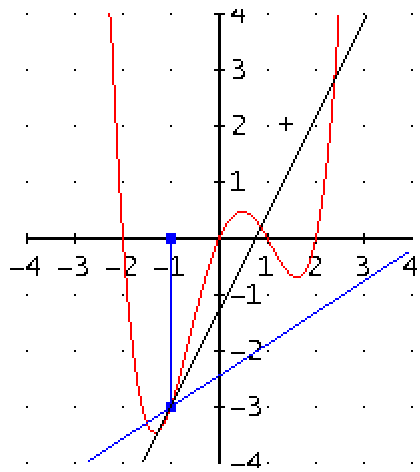
#12: $-\ 3\cdot(x + 2)$



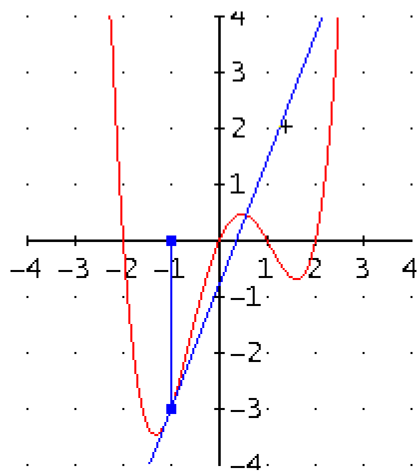
#13: seka(−1.5, −1)



#14: seka(-1.25, -1)



#15: seka(-1.1, -1)



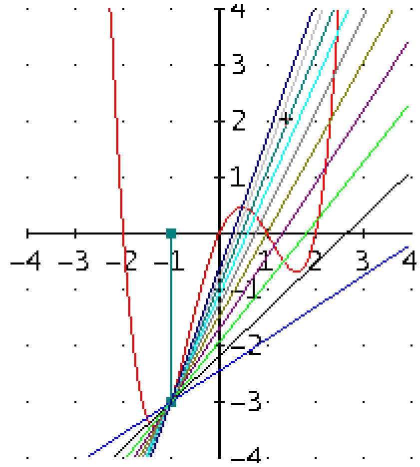
Hier ist die Sekante schon fast die Tangente.

#16: --

Wir lassen jetzt eine Folge von Sekanten zeichnen.
Dazu dient der Befehl VECTOR, der eine geordnete Liste erzeugt. Eintippen und

plotten lassen.
Format: VECTOR(Formel, Variable, von, bis, Schrittweite)

#17: VECTOR(seka(x2, -1), x2, -1.5, -1, 0.05)



#18: --

Tangenten zeichnen im Punkt eines Graphen

Aus der Ableitung gewinnt man die Steigung der Tangente.
f(x) eintippen und unter Analysis 'Differenzieren' wählen.

#19: f(x)

#20: $\frac{d}{dx} f(x)$

#21: $$2 \cdot x^3 - \frac{3 \cdot x^2}{2} - 4 \cdot x + 2$$

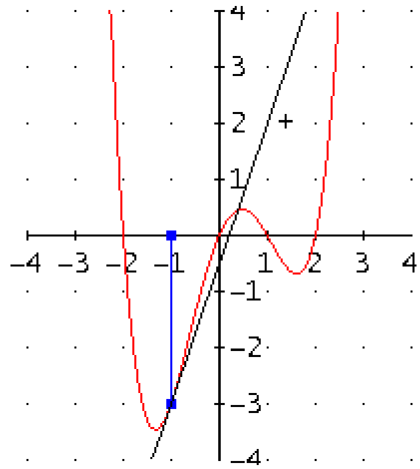
f-Strich mit Unterstrich definieren, nicht mit f' wie auf Papier!

#22: $f\_(x) := 2 \cdot x^3 - \frac{3 \cdot x^2}{2} - 4 \cdot x + 2$

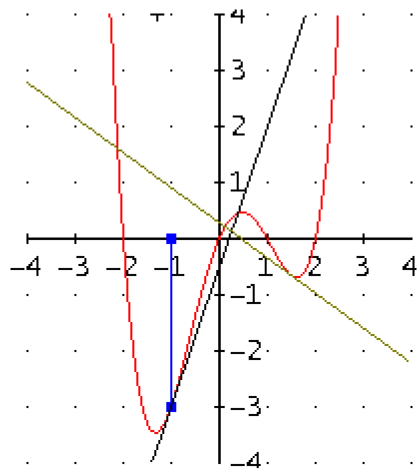
Die Formel für die Tangente im Punkt [xo,f(xo)]:

#23: tang(xo) := f_(xo)·(x - xo) + f(xo)

#24: tang(-1)



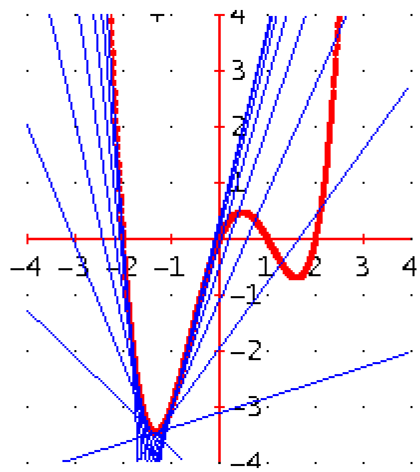
#25: tang(1.5)



#26: ---

Jetzt lassen wir viele Tangenten zeichnen.

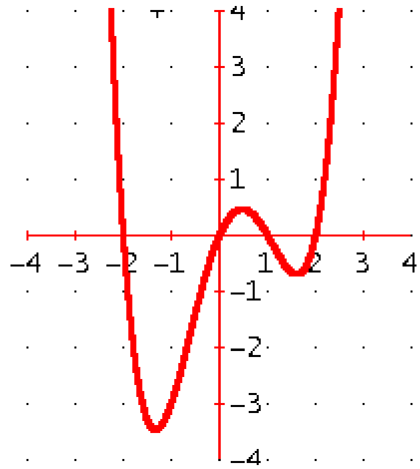
#27: VECTOR(tang(xo), xo, -2, -0.5, 0.1)



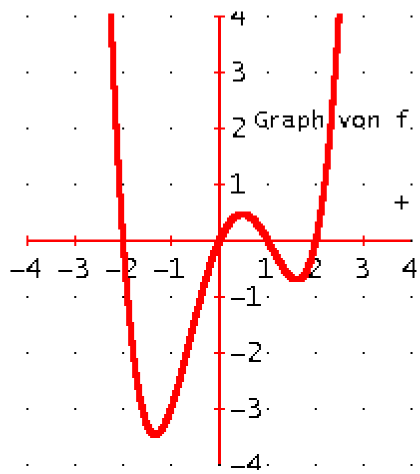
#28: ---

Wenn wir den Graphen fett haben wollen, dann lassen wir Punkte [x,y] zeichnen.
Vorher unter 'Extras-Anzeige' die Farbe und die Punktgröße einstellen.

#29: VECTOR([x, f(x)], x, -3, 3, 0.001)



Wenn Sie den Graphen beschriften wollen, dann klicken Sie zunächst dort in das Bild, wo der Text stehen soll. Ein kleines Kreuz erscheint. Dann wählen Sie im Graphikfenster den A-B-Button (Annotation einfügen) und schreiben den Text. Unmittelbar danach können Sie den Text mit der Maus noch verschieben.



Leider wird der Text beim Einbetten in das Dokument nicht verkleinert und erscheint so an falscher Stelle. Doppelklick in die obige Grafik zeigt den Text an der richtigen Stelle.

#30: --

Ableitung von f zeichnen

Tippen Sie f(x) ein und markieren Sie die Zeile.
Wählen Sie Analysis - Differenzieren

#31: f(x)

#32: $\frac{d}{dx}$ f(x)

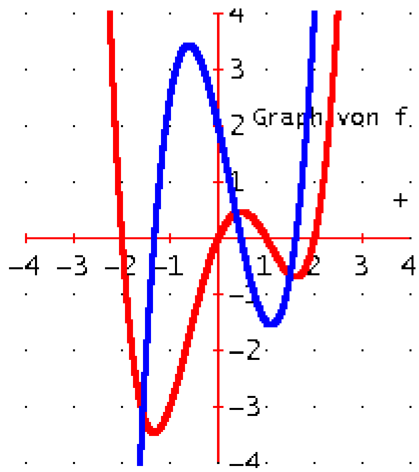
#33: $$2\cdot x^3 - \frac{3\cdot x^2}{2} - 4\cdot x + 2$$

Definieren Sie f_(x):= letzte Zeile (hier #33).
Wählen Sie Unterstrich (f_(x)), nicht Hochstrich (f'(x)).

#34: $$f\_(x) := 2\cdot x^3 - \frac{3\cdot x^2}{2} - 4\cdot x + 2$$

Wir lassen den Graphen von f_ fett plotten, nachdem wir vorher die Farbe unter Extras-Anzeige auf Blau gestellt haben.

#35: VECTOR([x, f_(x)], x, -3, 3, 0.001)



#36: --

Wir wollen nun zeigen, dass die Nullstellen der ersten Ableitung die Stellen sind, bei der die Stammfunktion waagerechte Tangenten hat.
Wir lassen zunächst die Nullstellen der ersten Ableitung berechnen. Eintippen f_(x)=0 und 'Lösen - numerisch - reell ' wählen (im GK)!
Wer nicht numerisch-reell wählt (also z.B. LK-Schüler), der muss manchmal mit riesigen, aber algebraisch exakten Ausdrücken rechnen. Im Gk reichen die Näherungswerte, die mit 'numerisch-reell' ausgegeben werden.

#37: f_(x) = 0

#38: NSOLVE(f_(x) = 0, x, Real)

#39: $x = -1.326345463 \vee x = 0.4690934444 \vee x = 1.607252018$

Die angezeigte Werte merken wir uns für später, indem wir sie definieren:

#40: xwT1 := -1.326345463

#41: xwT2 := 0.4690934444

#42: xwT3 := 1.607252018

xwT soll bedeuten: x mit waagerechter Tangente im Graphen. Sie können jeden anderen Bezeichner wählen. Wichtig ist nur, dass Sie selbst wissen, wie Ihre Werte heißen. Deshalb: 'sprechende' Bezeichner wählen.

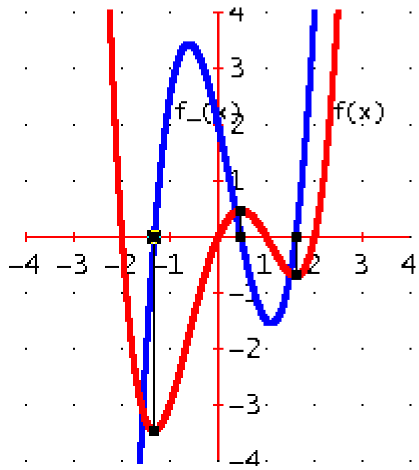
#43: ---

Nun wollen wir verdeutlichen, dass die Nullstellen der ersten Ableitung genau die x-Werte der Hoch- Tief- und Sattelpunkte der Stammfunktion sind. Deshalb ziehen wir Striche von den Nullstellen der Ableitung zu den Graphenpunkten der Stammfunktion durch Angabe der beiden Endpunkte der Strecken, wie oben.

#44: $\text{StreckeTP1} := \begin{bmatrix} xwT1 & 0 \\ xwT1 & f(xwT1) \end{bmatrix}$

#45: $\text{StreckeHP} := \begin{bmatrix} xwT2 & 0 \\ xwT2 & f(xwT2) \end{bmatrix}$

#46: $\text{StreckeTP2} := \begin{bmatrix} xwT3 & 0 \\ xwT3 & f(xwT3) \end{bmatrix}$



#47: ---

Man sieht sofort: Die Nullstellen der ersten Ableitung (blau) zeigen an, dass in der Stammfunktion (rot) eine waagerechte Tangente vorliegt. Das kann sein bei einem Tiefpunkt, bei einem Hochpunkt oder bei einem Sattelpunkt.
Zur rechnerischen Entscheidung, weil man der Graphik allein nicht traut, zieht man die zweite Ableitung hinzu,
indem man die erste Ableitung noch einmal differenziert:

#48: f_(x)

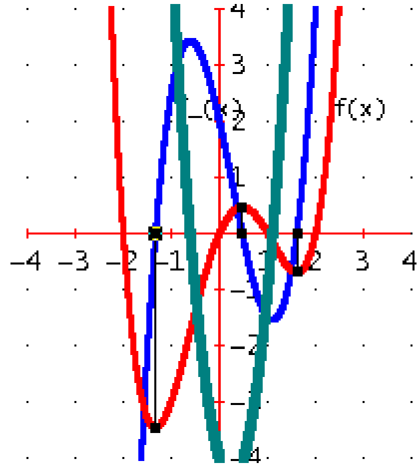
#49: $\frac{d}{dx}$ f_(x)

#50: $$6\cdot x^2 - 3\cdot x - 4$$

#51: f__(x) := $6\cdot x^2 - 3\cdot x - 4$

Die zweite Ableitung schreiben wir mit zwei Unterstrichen und zeichnen Sie grün:

#52: VECTOR([x, f__(x)], x, -3, 3, 0.001)



Jetzt sieht man:
Bei den x-Werten, bei denen die erste Ableitung null, die zweite aber positiv ist, hat Stammfunktion einen Tiefpunkt.

Bei den x-Werten, bei denen die erste Ableitung null, die zweite aber negativ ist, hat Stammfunktion einen Hochpunkt.

#53: ---

Damit haben Sie alle wesentlichen Zeichnungstechniken in 2D kennengelernt. In 3D geht es ähnlich. Davon zu gegebener Zeit.